مقاله

نظریه‌ی تحلیلی اعداد

مهدی حسنی *

مقدمه

نظریهٔ تحلیلی اعداد[۱] شاخه‌ای عمیق، مهم و جالب از ریاضیات است که با ابزار تحلیلی، خصوصاً احکامی که مربوط به توابع مختلط هستند، به مطالعه و استنتاج خواص اعداد و توابع مربوط به اعداد می‌پردازد. جدّیت و عمق آن به دلیل استفاده از لایه‌های مختلف ریاضیات، شامل جبر، هندسه و هندسه جبری و بیش از همه این‌ها لایه‌های عمیقی از آنالیز حقیقی، مختلط، فوریه و هارمونیک است. در اهمیّت و جذابیت آن همین بس که اغلب ریاضی‌دان‌های نامی و اثرگذار ریاضیات، علاوه بر آن‌هایی که به‌طور اخصّ در این حوزه فعالیت داشته‌اند، سعی کرده‌اند در این وادی گامی برداشته و اثری از خود برجا گذارند. مثال بارز این علاقه‌مندی، تلاشی است که بزرگان ریاضی در اثبات فرضیه معروف ریمان و مباحث پیرامون آن داشته‌اند. این امر حتّی در برخی از آثار سینمایی ریاضی نمود دارد. در این نوشتار مروری مختصر به روند تاریخی تولّد و گسترش نظریهٔ تحلیلی اعداد خواهیم داشت.

در بخشی از فیلم سینمایی یک ذهن زیبا، که دربارهٔ زندگی جان نش ساخته شده است،
وی را در حال سخنرانی دربارهٔ توزیع اعداد اوّل و فرضیهٔ ریمان نمایش می‌دهد.

نتایج اویلر

با تعقیب روش‌ها و سرنخ‌های اساسی در نظریهٔ تحلیلی اعداد درمی‌یابیم که پی‌ریز ساختمان زیبای این شاخه اویلر[۲] بوده است. وی در سال ۱۷۳۷ در تلاش موفّقی که برای اثبات واگرایی حاصل‌جمع معکوس اعداد اوّل انجام داد، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-s}$ را برای اعداد حقیقی $s > ۱$ درنظر گرفت و ثابت کرد اتّحاد

$$\sum_{n=۱}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p} (۱ - p^{-s})^{-۱},$$

که در آن حاصل‌ضرب روی تمام اعداد اوّل p گرفته می‌شود، برای $s > ۱$ برقرار است. این اتّحاد که بعدها به فرمول حاصل‌ضرب اویلر معروف شد، در واقع صورت تحلیلی قضیهٔ اساسی حساب می‌باشد. با استفاده از آن، زمانی که $s \to ۱^{+}$، اویلر توانست واگرایی $\sum_p p^{-۱}$ را اثبات کند، که حاصل‌جمع روی تمام اعداد اوّل p گرفته می‌شود. در این استنتاج، اویلر هر دو قضیهٔ باستانی مربوط به اعداد اوّل که به اقلیدس[۳] منسوب می‌شود را با روشی کاملاً متفاوت دوباره اثبات نمود. احکام اقلیدس عبارتند از:

قضیه ۱. هر عدد صحیح $n > ۱$ را می‌توان صرف‌نظر از ترتیب نوشتن عوامل، به‌طور یکتا به حاصل‌ضرب اعداد اوّل تجزیه کرد.

قضیه ۲. تعداد اعداد اوّل نامتناهی است.

حدس گاوس

اگر تعداد اعداد اوّل نابیشتر از x را با نماد $\pi(x)$ نشان دهیم، آنگاه قضیه دوّم اقلیدس می‌گوید

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x) = \infty.$$

سؤالی که به‌طور طبیعی به ذهن برخی از ریاضی‌دان‌های قرون ۱۸ و ۱۹، از قبیل لژاندر[۴]، گاوس[۵] و شاید اویلر خطور کرد این بود که مرتبه مجانبی رشد $\pi(x)$ چیست؟ در واقع آیا تابعی مقدّماتی مانند $f(x)$ وجود دارد که $\lim_{x\to\infty} \pi(x)/f(x) = ۱$ و یا به بیان ساده $\pi(x) \sim f(x)$؟ از حدس نادرست لژاندر در این باره که بگذریم، به حدس درست گاوس می‌رسیم که ادّعا می‌کرد

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) = \int_{۲}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\log t},$$

که در این‌جا و سراسر نوشتارمان، منظور از log لگاریتم طبیعی است. این‌که از نماد ln استفاده نمی‌کنیم در ادبیات نظریهٔ تحلیلی

[۱] Analytic Number Theory
[۲] Leonhard Euler(۱۷۰۷ - ۱۷۸۳)
[۳] AlexandriaEuclid(BC۳۲۵ - BC۲۶۵)
[۴] Adrien-Marie Legendre(۱۷۵۲ - ۱۸۳۳)
[۵] Johann Carl Friedrich Gauss (۱۷۷۷ - ۱۸۵۵)

اعداد کاملاً مرسوم است.

اویلر و گاوس

از آنجائی که $\mathrm{Li}(x) \sim x/\log x$، لذا $\pi(x) \sim x/\log x$ و این بدین معناست که احتمال آن‌که در بازه $[۲, x]$ عددی صحیح اوّل باشد در حدود $۱/\log x$ است، و احتمال اوّل بودن عددی که به دلخواه از بین اعداد طبیعی اختیار می‌شود برابر صفر خواهد بود! هر چند گاوس نتوانست حدسش را اثبات کند، امّا بعدها درستی حدس وی ثابت شد.

قضیهٔ دیریشله

دیریشله[۶]، که بعدها به عنوان جانشین گاوس در گوتینگن انتخاب گردید، در سال ۱۸۳۷ با الهام از اثبات اویلر برای واگرایی $\sum_p p^{-۱}$، توانست واگرایی سری

$$\sum_{\substack{p \\ p\equiv a[q]}} p^{-۱},$$

را ثابت کند که در آن جمع روی اعداد اوّل p متعلق به تصاعد حسابی $(a+kq)_{k\geqslant ۰}$ با شرط $\gcd(a,q) = ۱$ گرفته می‌شود. در واقع واگرایی سری مذکور نتیجه می‌دهد که تعداد چنین اعداد اوّلی نامتناهی است. دیریشله در استنتاجش برای اوّلین بار در یک استنتاج نظریه اعدادی به طور جدی از اعداد و توابع مختلط استفاده کرد. اغلب ریاضی‌دانان این نتیجه دیریشله را نقطه تولّد نظریهٔ تحلیلی اعداد، به معنای واقعیش می‌دانند، هر چند اثری که کار اویلر در به ثمر نشستن تلاش دیریشله داشت را نیز نقطهٔ عطف مهمی به شمار می‌آورند. با این حساب اگر اویلر را پی‌ریز این شاخه بدانیم، اوّلین سنگ بنا که با قدرت بسیار بالایی هم قرار داده شد، مربوط به دیریشله، و لذا سال ۱۸۳۷ تاریخ تولّد نظریهٔ تحلیلی اعداد خواهد بود.

[۶] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet(۱۸۰۵ ـ ۱۸۵۹)

ریمان و قضیه اعداد اوّل

در تلاش برای اثبات حدس گاوس، چبیشف[۷] با روش‌های مقدّماتی توانست ثابت کند که اگر حدّ نسبت $\pi(x)$ و $x/\log x$ موجود باشد آنگاه برابر ۱ است. منظور از روش مقدّماتی روشی است که از مفهوم اعداد و توابع مختلط استفاده نمی‌کند. در واقع این روش‌ها اغلب به دلیل محدودیت ابزار بسیار هم پیچیده و ظریف هستند. عمده تلاش بعدی مربوط به ریمان[۸] است. او در سال ۱۸۵۹ در تنها مقاله‌ای که در نظریه اعداد نوشت، تابعی که اویلر بکار بسته بود را به عنوان تابعی مختلط در نظر گرفت. این تابع که بعدها به نام تابع زتای ریمان معروف شد برای $\Re(s) > ۱$ توسط

$$\zeta(s) = \sum_{n=۱}^{\infty} n^{-s},$$

تعریف می‌شود. ریمان تابع $\zeta(s)$ را به کلّ صفحه مختلط، به جز قطبی ساده در $s = ۱$ با مانده‌ی ۱، ادامه‌ی تحلیلی داد و معادله‌ای تابعی برای آن نیز به دست آورد که نشان می‌داد صفرهای حقیقی این تابع اعداد $s = -۲n$ است که $n \geqslant ۱$ صحیح می‌باشد (این‌ها را صفرهای بدیهی می‌نامند). هم‌چنین تمامی صفرهای غیرحقیقی آن، که آن‌ها را صفرهای نابدیهی تابع زتا می‌نامیم، در نوار مشخص شده توسط $۰ \leqslant \Re(s) \leqslant ۱$ قرار داشته (این را نوار بحرانی می‌نامند) و نسبت به خط $\Re(s) = ۱/۲$ متقارنند (این را خط بحرانی می‌نامند).

ریمان و دیریشله

ریمان در ادامهٔ مقاله‌اش پنج حدس مهّم دربارهٔ ارتباط صفرهای نابدیهی تابع زتای ریمان و توزیع اعداد اوّل بیان نمود که عبارتند از:

۱. تعداد صفرها در نوار بحرانی نامتناهی است.

۲. اگر $N(T)$ برابر تعداد صفرهای نابدیهی $\rho = \beta + i\gamma$ در مستطیل مشخص شده توسط نامساوی‌های $۰ < \gamma \leqslant T$ و

[۷] Pafnuty Lvovich Chebyshev(۱۸۲۱ ـ ۱۸۹۴)

[۸] Georg Friedrich Bernhard Riemann(۱۸۲۶ ـ ۱۸۶۶)

$0 \leqslant \beta \leqslant 1$ باشد، آنگاه وقتی $T \to \infty$ داریم

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi \mathrm{e}}\right) + O(\log T).$$

۳. اگر قرار دهیم، $\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$، آنگاه $\xi(s)$ یک تابع تام با نمایش

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{Bs}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\mathrm{e}^{\frac{s}{\rho}},$$

است که در آن (و حاصل‌جمع‌هایی که در زیر می‌آید) ρ روی تمامی صفرهای نابدیهی تابع زتا حرکت می‌کند، و B ثابتی است که می‌تواند دقیقاً محاسبه می‌شود.

۴. اگر برای $x > 1$ قرار دهیم

$$J(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\rho}\mathrm{Li}(x^{\rho}) - \log 2 + \int_{x}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(t^{2}-1)\log t},$$

آنگاه

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}J(x^{\frac{1}{n}}),$$

که در آن $\mu(n)$ تابع موبیوس است.

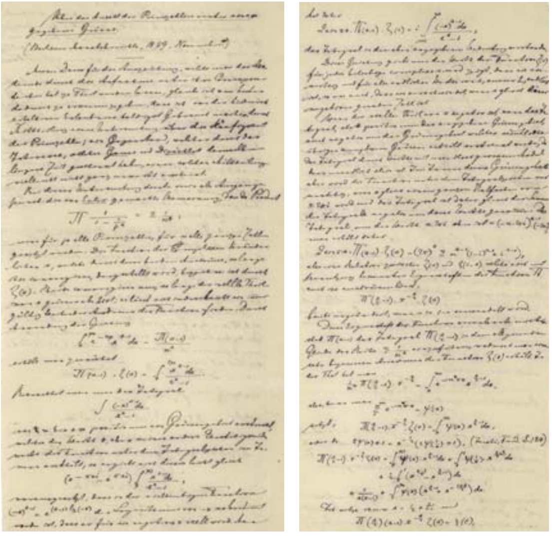
۵. تمامی صفرهای نابدیهی تابع زتا روی خط $\Re(s) = 1/2$ واقعند.

حدس شمارهٔ ۴ که فرمول صریح نام دارد، ارتباط واضح بین صفرهای نابدیهی تابع زتا و توزیع اعداد اوّل را تشریح می‌کند. با وجود آن‌که برنامهٔ ریمان برای اثبات حدس گاوس ناقص ماند، امّا طرحی که وی برای این کار ریخت توسط دیگران تعقیب شد، و در طول زمانی در حدود سی سال بعد از ریمان، درستی حدس‌های ۱ تا ۴ اثبات شدند. در نهایت بر اساس همین طرح ریمان، در سال ۱۸۹۶ هادامارد[9] و پوسین[10] مستقلاً درستی حدس گاوس را اثبات کردند و بدین ترتیب قضیه اعداد اوّل که می‌گوید $\pi(x) \sim x/\log x$ اثبات شد. جالب آن‌که از بین صدها قضیه دربارهٔ اعداد اوّل، این یکی را قضیه اعداد اوّل نامیده‌اند. این قضیه قلب تپندهٔ نظریهٔ تحلیلی اعداد محسوب شده و بر اساس آن احکام بسیاری استنتاج

[9] Jacques Salomon Hadamard(۱۸۶۵ - ۱۹۶۳)

[10] Charles Jean de la Vallée Poussin(۱۸۶۶ - ۱۹۶۲)

شده است.



دو صفحه نخست از دست‌نوشت معروف ریمان به تاریخ نوامبر ۱۸۵۹ دربارهٔ اعداد اوّل

رشد نظریه‌ی تحلیلی اعداد و فرضیه‌ی ریمان

به صورتی که در بخش پیشین شرح دادیم، نظریهٔ تحلیلی اعداد متولّد شد و مسیر اصلی آن که بررسی توزیع اعداد اوّل با ابزار آنالیزی می‌باشد، شکل گرفت و وارد قرن بیستم شد. همانند اکثر شاخه‌های علوم، رشد و توسعه‌ی نظریه‌ی تحلیلی اعداد در طول قرن بیستم بسیار چشمگیر بوده و این قرن شاهد تولّد مسیرهای مهم دیگری در این حوزه از ریاضی بوده است که اغلب با سایر شاخه‌های مهم ریاضی، شامل جبر، هندسه جبری و آنالیز در ارتباط مستقیم است. برای دیدن فهرست نسبتاً کاملی از بحث‌های مهم و رایج نظریهٔ تحلیلی اعداد می‌توانید به فهرست فصل‌های کتاب [۳] نگاه کنید. این کتاب بسیار جدّی و عمیق بوده و توسط دو تن از قویترین متخصصان نظریه اعداد تألیف شده است.

بیان و اثبات همانندِ قضیه‌ی اعداد اوّل برای دیگر پدیده‌ها، به‌ویژه خصوص پدیده‌های جبری، انقلابی در این شاخه‌ها به وجود آورد. گواهی از این امر تعداد مدال‌های فیلدز اعطا شده برای کارهایی است که در این راستا انجام شده است. از میان مسائل مختلفی که در نظریه‌ی تحلیلی اعداد مطرح می‌باشد، حدس شماره‌ی ۵ ریمان، که کماکان اثبات نشده، بدون شک از هر نظر در رأس همگی قرار دارد. امروزه این حدس به فرضیه‌ی ریمان معروف شده است. در راستای اثبات آن ثابت شده است که در حدود ٪۴۰ صفرهای نابدیهی روی خط بحرانی قرار دارند. هم‌چنین معادل‌های بسیاری برای آن در اکثر شاخه‌های ریاضی به دست آمده‌اند. برخی از این معادل‌ها آن‌قدر ساده بیان می‌شوند که وسوسه‌ی هر فرد کنجکاوی را برای اثبات آن برمی‌انگیزد. مثلاً

ثابت می‌شود که درستیِ فرضیه‌ی ریمان معادل است با برقراریِ نامساوی

$$\sigma(n) \leqslant H_n + \mathrm{e}^{H_n} \log H_n,$$

برای هر عدد طبیعی $n \geqslant 1$، با تساوی فقط برای حالت $n = 1$. در این نامساوی، طبق معمول $\sigma(n)$ برابر حاصل‌جمع شمارنده‌های مثبت n و $H_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-1}$. می‌توانید بخت خود را برای اثبات این نامساوی و برنده شدن جایز یک میلیون دلاری، به همراه کلّی افتخار علمی، بیازمایید. به هر حال با فرض درستی یا نادرستی این حدس، صدها قضیه و گزاره در شاخه‌های مختلف ریاضیات و برخی از دیگر شاخه‌های علوم هم‌چون فیزیک نظری استنتاج شده است. پیتر سَرناک[11] دربارهٔ اهمیّت آن می‌گوید که ابزارمان در ریاضیات بدون فرضیهٔ ریمان همانند یک پیچ‌گوشتی و با آن همانند یک بولدوزر است. برخی معتقدند که این حدس دشوارترین مسالهٔ ریاضی است که تاکنون به ذهن بشر خطور کرده است.

مراجع

[1] P. Borwein, S. Choi, B. Rooney and A. Weirathmueller (Eds.), *The Riemann Hypothesis*, Springer, 2008.

[2] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory (third edition)*, Springer, 2000.

[3] H. M. Edwards, Riemann's Zeta Function, Dover Publications, 2001.

[4] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, American Mathematical Society, 2004.

* دانشگاه زنجان

[11] Peter Clive Sarnak(۱۹۵۳ ـ)