۱ اعداد گویا و گنگ

در آغاز درس گفتیم که مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی را بر این اساس که آیا می‌توان عضوی از آن را به صورت نسبت دو عدد صحیح نوشت یا نه، به دو زیر مجموعهٔ اعداد گویا، $\mathbb{Q}$، و اعداد اصمّ (گنگ)، $\mathbb{Q}'$، افراز می کنیم. همچنین وعده دادیم که در یکی از فصلهای آتی راههایی جهت تشخیص اینکه از بین اعداد حقیقی کدامیک در $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Q}'$ هستند ارائه کنیم. هم‌اکنون حداقل ابزاری که برای این کار لازمست فراهم شده و لذا در این فصل به این موضوع می‌پردازیم. تشخیص گویا و اصمّ بودن اعداد از جمله مسائل پیچیده در نظریه اعداد بوده و اغلب بسیار دشوار است. در این درس ما به موارد مخصوصی که نسبتاً آسان به دست می‌آیند خواهیم پرداخت.

در اینجا لازمست اشاره کنیم که اعداد گویا یا دارای تعداد متناهی رقم اعشاری هستند و یا شامل نامتناهی رقم اعشار با نظم و گردش مشخص. در حالی که اعداد اصمّ در شکل اعشاری دارای نامتناهی رقم بودن نظم هستند. این نگرش به اعداد گویا و اصمّ جایگاه محاسباتی ویژه‌ای دارد، و در این خصوص پروژهٔ ۱۱ در صفحات آتی مطرح شده است.

۱.۱ اعداد رادیکالی و محک چندجمله‌ای

قضیهٔ زیر به لحاظ قدمت و غنای تاریخی، و همچنین اصالتش، در زمرهٔ مهمترین احکام ریاضیات باستانی قرار دارد. هرچند اثبات سادهٔ آن حتی قابل طرح در سطح دبیرستان است.

قضیه ۱. *$\sqrt{2}$ گنگ است.*

اثبات. (برهان خلف) فرض کنید $\sqrt{2}$ گویا باشد. لذا اعداد $a, b \in \mathbb{N}$ با شرط $\gcd(a,b) = 1$ موجودند، به طوریکه $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. داریم

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Longrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Longrightarrow a^2 = 2b^2 \Longrightarrow a^2 \in \mathbb{E} \Longrightarrow a \in \mathbb{E} \Longrightarrow a = 2a'.$$

با طی کردن روندی مشابه، داریم

$$(2a')^2 = a^2 = 2b^2 \Longrightarrow b^2 = 2a'^2 \Longrightarrow b^2 \in \mathbb{E} \Longrightarrow b \in \mathbb{E} \Longrightarrow b = 2b'.$$

نتیجه اینکه $\gcd(a,b) = \gcd(2a', 2b') = 2\gcd(a', b') \geqslant 2$، و این با فرض $\gcd(a,b) = 1$ در تناقض است. □

قضیه ۲. *فرض کنید $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0$ چند جمله‌ای با ضرایب صحیح باشد، و $a_0, a_n \neq 0$. اگر عدد گویای تحویلناپذیرِ $\frac{a}{b}$ (یعنی صادق در $\gcd(a,b) = 1$) ریشهٔ P باشد، آنگاه $a | a_0$ و $b | a_n$.*

اثبات. داریم

$$P\left(\frac{a}{b}\right) = ۰ \Longrightarrow a_n\left(\frac{a}{b}\right)^n + a_{n-۱}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-۱} \cdots + a_۱\left(\frac{a}{b}\right) + a_۰ = ۰.$$

با ضرب طرفین تساوی اخیر در b^n نتیجه می‌شود

$$a_n a^n + a_{n-۱}a^{n-۱}b + \cdots + a_۱ ab^{n-۱} + a_۰ b^n = ۰ \Longrightarrow a_n a^n + kab + a_۰ b^n = ۰.$$

با استفاده از تساوی اخیر، و با توجّه به اینکه $\gcd(a, b^n) = ۱$، داریم

$$a(a_n a^{n-۱} + kb) = -a_۰ b^n \Longrightarrow a|a_۰ b^n \Longrightarrow a|a_۰.$$

به همین صورت درستیِ $b|a_n$ نتیجه، و اثبات کامل می‌شود. □

نتیجه ۳. *فرض کنید $P(x) = a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} \cdots + a_۱ x + a_۰$ چند جمله‌ای با ضرایب صحیح باشد، و $a_۰, a_n \neq ۰$. در این صورت تمام ریشه‌های گویای معادلهٔ $P(x) = ۰$ (در صورت وجود) داخل مجموعهٔ*

$$Q(P) = \left\{\pm\frac{a}{b} \ : \ a|a_۰, b|a_n\right\}$$

هستند. لذا محک زیر برای تشخیص گنگ یا گویا بودن آن دسته از اعداد حقیقی که می‌توانند ریشهٔ یک چند جمله‌ای با ضرایب صحیح (و حتّی گویا) باشند به دست می‌آید.

محک چندجمله‌ای برای تشخیص گنگ یا گویا بودن. اگر $z \in \mathbb{R} - Q(P)$ و $P(z) = ۰$، آنگاه $z \in \mathbb{Q}'$.

نتیجه ۴. *فرض کنید $P(x) = x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} \cdots + a_۱ x + a_۰$ چند جمله‌ای با ضرایب صحیح باشد. در این صورت ریشه‌های حقیقی این چندجمله‌ای یا عدد صحیح و یا عدد اصمّ هستند.*

مثال ۵. نشان می‌دهیم که عدد زیر گنگ است

$$z = \sqrt[۳]{۱ + \sqrt{۲}} + \sqrt[۳]{۱ - \sqrt{۲}}.$$

برای این کار قرار می‌دهیم $\alpha = \sqrt[۳]{۱ + \sqrt{۲}}$ و $\beta = \sqrt[۳]{۱ - \sqrt{۲}}$. داریم

$$z^۳ = (\alpha + \beta)^۳ = \alpha^۳ + \beta^۳ + ۳\alpha\beta(\alpha + \beta) = ۲ - ۳z.$$

لذا عدد z ریشهٔ معادلهٔ $P(x) = x^۳ + ۳x - ۲ = ۰$ است. چون $P'(x) = ۳(x^۲ + ۱) > ۰$، لذا نمودار $P(x)$ اکیداً صعودی می‌باشد. ضمناً $P(۰) = -۲$ و $P(۱) = ۲$. در نتیجه $P(x) = ۰$ تنها یک جواب حقیقی دارد که در بازهٔ $(۰, ۱)$ واقع است، و این ریشه البتّه همان z می‌باشد. پس $z \in (۰, ۱)$. از طرفی $Q(P) = \{\pm۱, \pm۲\}$. لذا $z \notin Q(P)$، و در نتیجه z اصمّ است.

۱.۲ اعداد لگاریتمی و مثلّثاتی

قضیه ۶. *فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ و $m, n \in \mathbb{N}$، بطوریکه $p|m$ و $p \nmid n$. در اینصورت $\log_n^m$ (لگاریتم m در مبنای n) عددی اصمّ است.*

اثبات. (برهان خلف) فرض کنید $\log_n^m$ که عددی مثبت است، گویا باشد. لذا اعداد طبیعی a, b وجود دارند که $\log_n^m = \frac{a}{b}$، و یا معادلاً $n^a = m^b$. امّا تساوی اخیر ناممکن است، زیرا با توجّه به مفروضات قضیه $p|m^b$ و $p \nmid n^a$. این تناقض برهان را کامل می‌کند. □

هرچند اثبات برخی از بندهای قضیهٔ زیر در سطح این درس است، امّا از آوردن آنها صرف‌نظر می‌کنیم.

قضیه ۷.

۱. *برای هر عدد گویای ناصفر r، مقادیر $\sin r$، $\cos r$ و $\tan r$ زمانی که زاویهٔ r برحسب رادیان محاسبه شده است، اعدادی اصمّ هستند.*

۲. *به استثنای $\frac{۱}{۲} = \cos ۶۰^\circ = \sin ۳۰^\circ$ برای هر عدد گویای r که $۰ < r < ۹۰$، مقادیر $\sin r$ و $\cos r$، زمانی که زاویهٔ r برحسب درجه محاسبه شده است، اعدادی اصمّ هستند.*

۱.۳ اعداد π و e، و برخی اعداد برگرفته از آن دو

قضیه ۸. *عدد $\mathrm{e} = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{k!}$ گنگ است.*

اثبات. برای هر عدد طبیعی $n \geqslant ۱$ داریم:

$$\begin{aligned} ۰ < \mathrm{e} - \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{k!} &= \sum_{k=n+۱}^{\infty} \frac{۱}{k!} \\ &= \frac{۱}{n!}\left(\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{(n+۱)(n+۲)} + \cdots\right) \\ &< \frac{۱}{n!}\left(\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{(n+۱)^۲} + \cdots\right). \end{aligned}$$

از آنجایی که $n \geqslant ۱$ فرض شده است لذا $۰ < \frac{۱}{n+۱} \leqslant \frac{۱}{۲}$. در نتیجه $\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{(n+۱)^۲} + \cdots$ یک سری هندسی با قدرنسبت مثبت و کمتر از واحد است که همگرا خواهد بود. مقدار این سری برابر است با

$$\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{(n+۱)^۲} + \cdots = \frac{\frac{۱}{n+۱}}{۱ - \frac{۱}{n+۱}} = \frac{۱}{n}.$$

در نتیجه نامساوی مهم زیر برای هر عدد طبیعی n به دست می‌آید

$$۰ < \mathrm{e} - \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{k!} < \frac{۱}{n(n!)}.$$

حال با برهان خلف فرض کنید e گویا باشد. قرار می‌دهیم $\mathrm{e}=\frac{a}{b}$ که $a,b\in\mathbb{N}$. در نامساوی اخیر قرار می‌دهیم $n=b$. نتیجه اینکه

$$۰<\frac{a}{b}-\sum_{k=۰}^{b}\frac{۱}{k!}<\frac{۱}{b(b!)}.$$

با ضرب طرفین در $b!$ نتیجه می‌شود

$$۰<a(b-۱)!-\sum_{k=۰}^{b}\frac{b!}{k!}<\frac{۱}{b}\leqslant ۱.$$

چونکه $a(b-۱)!$ و $\sum_{k=۰}^{b}\frac{b!}{k!}$ اعداد صحیح هستند، تفاضلشان نیز باید صحیح باشد. اما هیچ عدد صحیحی در بازه‌ی $(۰,۱)$ وجود ندارد. این تناقض نشان می‌دهد که e گنگ است. □

همانطور که می‌بینید در اثبات فوق از مفهوم سری‌ها استفاده کردیم. با استفادهٔ ظریفتر از مفاهیم حسابان می‌توان قضیهٔ زیر را نیز اثبات کرد. در اینجا قضیه را بدون اثبات می‌آوریم.

قضیه ۹. *عدد π گنگ است.*

بر خلاف اثباتهای اصمّ بودن اعداد e و π، اثبات گنگ یا گویا بودن اعدادی که به نحوی به این اعداد ارتباط دارند، معمولاً کار دشواری است. وضعیت تعدادی از این اعداد را در تبصرهٔ زیر بیان می‌کنیم.

تبصره ۱۰.

۱. *هر توان گویای ناصفر از اعداد e و π گنگ هستند.*

۲. *مقدار هر چند جمله‌ای غیر ثابت با ضرایب صحیح به ازای اعداد e و π گنگ هستند.*

۳. *اعداد زیر همگی گنگ هستند*

$$\mathrm{e}^{\sqrt{۲}},\ \mathrm{e}^{\sqrt{۵}},\ \sqrt{۷}\mathrm{e}^{۳\sqrt{۲}},\ \mathrm{e}^{\pi},\mathrm{e}^{\sqrt{۲}\pi},\ \mathrm{e}^{\pi}+\pi,\ \pi+\ln ۲+\sqrt{۲}\ln ۳.$$

۴. *وضعیّت گنگ یا گویا بودن اعداد زیر تاکنون نامعلوم است*

$$۲^{\mathrm{e}},\ \pi^{\mathrm{e}},\ \pi^{\sqrt{۲}},\ \mathrm{e}+\pi.$$

پروژه ۱۱. *رکوردزنی محاسباتی در محاسبهٔ ارقام اعشاری اعداد گنگ معروف از جمله عدد π کاریست که تقریباً سه قرن ادامه داشته و به موازات ظهور کامپیوترها وارد مراحل اعجاب آور شده است. در جدول زیر بخشی از رکوردهای اخیر تعداد ارقام محاسبه شدهٔ عدد π به همراه سال محاسبه و نام محاسبان درج شده است.*

Miyoshi and Kanada	1981	2,000,036
Kanada-Yoshino-Tamura	1982	16,777,206
Gosper	1985	17,526,200
Bailey	Jan. 1986	29,360,111
Kanada and Tamura	Sep. 1986	33,554,414
Kanada and Tamura	Oct. 1986	67,108,839
Kanada et. al	Jan. 1987	134,217,700
Kanada and Tamura	Jan. 1988	201,326,551
Chudnovskys	May 1989	480,000,000
Kanada and Tamura	Jul. 1989	536,870,898
Kanada and Tamura	Nov. 1989	1,073,741,799
Chudnovskys	Aug. 1991	2,260,000,000
Chudnovskys	May 1994	4,044,000,000
Kanada and Takahashi	Oct. 1995	6,442,450,938
Kanada and Takahashi	Jul. 1997	51,539,600,000
Kanada and Takahashi	Sep. 1999	206,158,430,000
Kanada-Ushiro-Kuroda	Dec. 2002	1,241,100,000,000
Takahashi	Jan. 2009	1,649,000,000,000
Takahashi	Apr. 2009	2,576,980,377,524
Bellard	Dec. 2009	2,699,999,990,000
Kondo and Yee	Aug. 2010	5,000,000,000,000

علاوه بر بحث رکوردزنی، محاسبهٔ ارقام عدد π و دیگر ثابتهای مهمّ ریاضی برای بررسی توزیع ارقام ۹, ۸, . . . , ۳, ۲, ۱, ۰ در شکل اعشاری آنها صورت می‌گیرد. سوال اینست که آیا توزیع این ارقام یکنواخت است؟ یعنی آیا ظهور هر کدام از این ارقام در حدود ۱۰% است، و یا اینکه توزیع آنها دارای چولگی‌های ناهمگون است؟ در صورت یکنواخت بودن توزیع می‌گوییم که آن عدد نرمال است. محاسبات مختلف تاکنون مویّد نرمال بودن عدد π بوده است. برای نمایش محاسبات مذکور، تصاویری همانند آنچه که در شکل ۱ آورده‌ایم مفید هستند. در این تصاویر، برای هر رقم یک رنگ اختصاص داده شده و سپس نمایش ارقام با جایگزینی رنگ مربوط صورت می‌گیرد. تصویر سمت چپ این شکل حدود ۱۰۰۰۰ رقم اعشاری و تصویر سمت راست آن در حدود ۱۰۰۰۰۰۰ رقم را نمایش می‌دهند. یکنواخت بودن توزیع ارقام در این قبیل تصاویر کاملاً مشهود است. در این پروژه یک یا چند مورد از بندهای زیر می‌تواند مدّ نظر باشد:

۱ . بررسی روشهای محاسبهٔ ارقام اعشاری عدد π .

۲ . پیاده‌سازی روشهای مذکور در برنامه‌های کامپیوتری.

۳ . برنامه‌نویسی برای تولید تصویر ارقام اعشاری عدد π و جستجوی نظم در توزیع ارقام به طور تجربی.

۴ . مطالعهٔ فرمولهای محاسبهٔ عدد π و مقایسهٔ آنها.

۵. مطالعه و بررسی اثباتهای اصمّ و متعالی بودن عدد π .

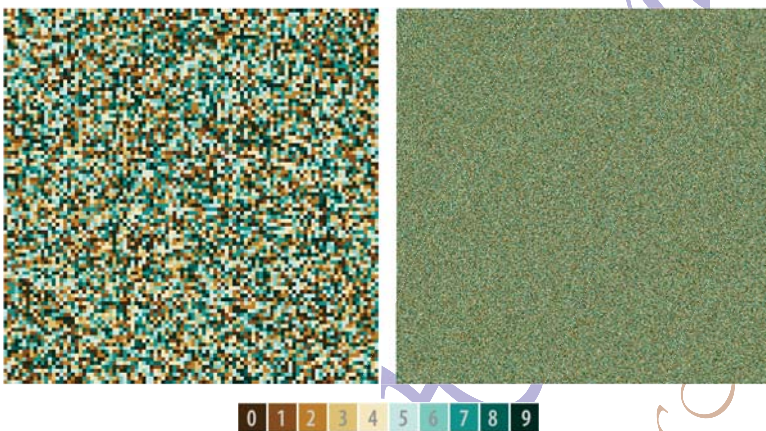
۶. تاریخچهٔ عدد π .

همانند همین پروژه را می‌توان برای دیگر ثابتهای مهمّ ریاضی از جمله عدد e و یا ثابت مهمّ اویلر که توسط رابطهٔ

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n} - \ln n\right),$$

تعریف می‌شود اجرا نمود. مخصوصاً که وضعیّت گنگ یا گویا بودن این عدد تاکنون نامعلوم

است، و لذا اجرای چنین پروژه‌ای می‌تواند در شناخت ماهیّت آن مفید باشد.



شکل ۱: نمایش ارقام اعشاری عدد π

۴.۱ اعداد جبری و متعالی، قضیهٔ گِلفاند و اعداد توانی

در بخش آغازین این فصل محکی برای تشخیص گنگ یا گویا بودن آن دسته از اعداد حقیقی که می‌توانند ریشهٔ یک چند جمله‌ای با ضرایب صحیح (و حتّی گویا) باشند ارائه کردیم. مجموعهٔ این دسته از اعداد حقیقی را اعداد جبری می‌نامند. با بررسی مثالهایی دیدیم که اعداد رادیکالی (اعدادی که از اخذ رادیکال با فرجه‌های مختلف طبیعی از متناهی تعداد اعداد گویا، و تعداد متناهی بار ترکیب چهار عمل اصلی از آنها حاصل می‌شوند) جبری هستند. البتّه اینها تنها اعداد جبری نیستند. مثلاً اعداد گویا همگی جبری هستند. به عنوان مثال غیر گویا و غیر رادیکالی $\sin 1^\circ$ را در نظر می‌گیریم که قابل بیان به شکل رادیکالی (آنطور که در بالا تعبیر کردیم) نیست، امّا با این حال جبریست، و در واقع ریشهٔ چند یک جمله‌ای از درجهٔ ۴۸ به شکل زیر است

$$281474976710656x^{48} - 3377699720527872x^{46} + \cdots - 3456x^2 + 1,$$

و البتّه چندجمله‌ای دیگری با درجهٔ پایین‌تر از برای منظور فوق وجود ندارد (اصطلاحاً این چند جمله‌ای مینیمال است). به اعدادی که جبری نباشند اعداد متعالی گوییم. این اعداد حتماً اصمّ نیز هستند. ثابت می‌شود که اعداد π و e متعالی هستند، هرچند اینها اوّلین اعداد متعالی شناخته شده نیستند، زیرا اوّلین عددی که رسماً ثابت شد متعالیست منسوب به لیوویل بوده و برابر $0.1010010000001\ldots$ است. در این عدد تعداد صفرهای بین ارقام واحد از دنبالهٔ $1!, 2!, 3!, 4!, \ldots$ تبعیّت می‌کند. همچنین متعالی بودن (و نتیجتاً اصمّ بودن) بسیاری از اعدادی که در تبصرهٔ ۱۰ به آنها اشاره شد نتیجه‌ای از قضیهٔ مهم زیر است.

قضیه ۱۲. (*قضیهٔ گلفاند*) *فرض کنید α عددی جبری و $\alpha \neq 0, 1$ و β جبری و اصمّ باشد. در این صورت α^{β} متعالیست.*

هرچند قضیهٔ گلفاند بر متعالی (و نتیجتاً اصمّ) بودن اعداد توانی به شکل α^{β} تحت شرایط خاص دلالت دارد، امّا با این وجود با حذف شرایط قضیه حاصل α^{β} می‌تواند گویا هم باشد، حتّی در شرایط نابدیهی. قضیهٔ زیر این بحث را بیشتر شرح می‌دهد.

قضیه ۱۳.

۱. *گویا به توان گویا می‌تواند گویا و یا گنگ باشد.*
۲. *گویا به توان گنگ می‌تواند گویا و یا گنگ باشد.*
۳. *گنگ به توان گویا می‌تواند گویا و یا گنگ باشد.*
۴. *گنگ به توان گنگ می‌تواند گویا و یا گنگ باشد.*

اثبات. توجّه می‌کنیم که بنا بر قضیهٔ ۶، عدد $\log_2^3$ اصمّ است.

۱. عبارتهای $1 = 1^1$ و $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ را در نظر می‌گیریم.
۲. عبارتهای $3 = 2^{\log_2^3}$ و $\sqrt{3} = 2^{\frac{1}{2}\log_2^3}$ را در نظر می‌گیریم.
۳. عبارتهای $2 = \sqrt{2}^{2}$ و $\sqrt{2} = \sqrt{2}^{1}$ را در نظر می‌گیریم.
۴. عبارتهای $3 = \sqrt{2}^{2\log_2^3}$ و $\sqrt{3} = \sqrt{2}^{\log_2^3}$ را در نظر می‌گیریم. $\square$

۵.۱ تمرینات

۱. نشان دهید که عدد $0/123456789101112131414\ldots$ گنگ است. در این عدد تمامی اعداد طبیعی به عنوان ارقام اعشاری پشت سر هم بعد از ممیّز درج شده‌اند.

۲. فرض کنید $n \geqslant 2$ عدد طبیعی و $p \in \mathbb{P}$. با استفاده از محک چندجمله‌ای برای گنگ بودن نشان دهید $\sqrt[n]{p}$ عددی گنگ است.

۳. قرار دهید $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ و $\beta = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$. گنگ یا گویا بودن اعدد $\alpha + \beta$، $\alpha - \beta$، $\alpha\beta$، و $\frac{\alpha}{\beta}$ را بررسی کنید.

۴. گنگ یا گویا بودن عدد $z = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ را بررسی کنید (راهنمایی: نشان دهید که این عدد ریشهٔ چندجمله‌ای $P(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$ است).

۵. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $R(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب صحیح، با درجهٔ اکیداً کمتر از $2n$ و صادق در شرایط $R(0) = 0$ و $R(\pm 1) \neq 0$ باشد. ثابت کنید که تمام ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^{2n} + R(x) - 1 = 0$ (در صورت وجود) اعداد گنگ هستند.

۶. برای هر عدد طبیعی n درستی تساویهای زیر را نشان دهید

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{[en!]}{n!}, \qquad \sum_{k=0}^{n} P(n,k) = [en!].$$

در تساوی فوق $P(n,k)$ نشانگر ترتیب k عنصر متمایز از n عنصر متمایز است (راهنمایی: به اثبات گنگ بودن عدد e توجّه کنید).

۷. فرض کنید $r \in \mathbb{Q}^+$ و $r \neq 1$. با استفاده از تبصرهٔ ۱۰ نشان دهید که $\ln r \in \mathbb{Q}'$.

مراجع

[۱] غلامحسین مصاحب، تئوری مقدماتی اعداد، جلد اول، دو قسمت، انتشار کتابفروشی دهخدا (۱۳۵۳).

[۲] غلامحسین مصاحب، تئوری مقدماتی اعداد، جلد دوم، سه قسمت، انتشارات سروش (۱۳۵۸).[۱]

[3] David H. Bailey, Jonathan M. Borwein, Andrew Mattingly, Glenn Wightwick, The Computation of Previously Inaccessible Digits of π[۲] and Catalan's Constant, *Notices of the AMS*, Vol. 60, N0. 7 (2013), 844–854.

[4] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive.* `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html`

[5] G. H. Hardy, E.M. Wright, *A Introduction to the Theory of Numbers* (Sixth Edition, Edited by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman), Oxford University Press, 2008.

[6] Amol Sasane, Irrational Numbers Redux, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 119, No. 5 (May 2012), Page 380.

[7] James J. Tattersall, *Elementary Number Theory in Nine Chapters* (Second Edition), Cambridge University Press, 2005.

[8] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press, 2003.

[۱] تئوری مقدماتی اعداد نام کتابی دو جلدی در زمینه ریاضیات و نظریه اعداد اثر دکتر غلامحسین مصاحب است. جلد اول آن در دو قسمت و ۱۳۹۵ صفحه در سال ۱۳۵۳ توسط انتشار کتابفروشی دهخدا، و جلد دوم آن در سه قسمت و ۱۸۰۳ صفحه در سال ۱۳۵۸ توسط انتشارات سروش به چاپ رسیده است. این کتاب در سال ۱۳۵۸ به عنوان «کتاب سال» در رشته ریاضیات برگزیده شد. کتاب تئوری مقدماتی اعداد نخستین کتاب در نظریهٔ اعداد به زبان فارسی است که دانش حساب را با تأسیس دستگاههای اصول موضوعه عرضه می‌دارد. مؤلف چکیده کارهای مهمّی را که از سدهٔ پانزدهم میلادی تا اواسط قرن بیستم در زمینهٔ اعداد صورت گرفته یکجا گرد آورده و با زبانی ساده، قابل فهم و در عین حال دقیق ارائه کرده است.