احتمال اینکه دو عدد طبیعی دلخواه عامل مشترکی نداشته باشند چقدر است؟

مهدی حسنی

عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه زنجان، عضو شورای علمی خانه ریاضیات زنجان

چکیده: در این نوشتار به بررسی پاسخ سوالی که در عنوان بالا مطرح شده است می پردازیم. در این راستا نخست مفهوم احتمال ذکر شده را بررسی و روشن می کنیم، و سپس راه کاری برای محاسبه آن با مربوط کردن مساله به تابع کامل اویلر ارائه می نماییم. سعی بر این بوده است که طیف وسیعی از خوانندگان شامل دانش آموزان راهنمایی و دبیرستان، دبیران، دانشجویان مقاطع مختلف و اساتید از این نوشتار بهره مند گردند.

1. نگاهی به مفهوم احتمال

وقتی صحبت از احتمال می شود اکثر ما به یاد اصطلاح شیر و خط آمدن در پرتاب سکه و یا پرتاب تاس می افتیم. به عنوان مثال در پرتاب تاس سالم و همگن، احتمال رو آمدن هر وجه (و عدد روی آن) برابر $\frac{1}{6}$ است. آیا این بدین معناست که از هر شش پرتاب هر عدد لزوماً باید یک بار ظاهر شود؟ بدیهیست که این برداشت با تجربیات عملی ما سازگار نیست، چراکه برای اغلب ما این اتفاق افتاده است که برای آغاز بازی (و آمدن عدد 6) بیش از شش بار تلاش نموده ایم. پس پاسخ $\frac{1}{6}$ در این مساله، و یا $\frac{1}{2}$ در پرتاب سکه حقیقتاً به چه معناست؟ برای پاسخ به این

سوال فرض کنید تاس را n بار پرتاب می کنیم و تعداد رو آمدن یکی از وجه ها (یا عدد روی آنرا) شمرده و با $A(n)$ نشان می دهیم. در این صورت مشاهده می شود که نسبت $\frac{A(n)}{n}$ برابر $\frac{1}{6}$ یا عددی نزدیک به آنست. در واقع پاسخ $\frac{1}{6}$ در مساله تاس بدین معناست که هر قدر تعداد پرتابها بیشتر می شود (و n بزرگتر می گردد) نسبت $\frac{A(n)}{n}$ به $\frac{1}{6}$ نزدیکتر می گردد. به زبان ریاضی

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}=\frac{1}{6}.$$

تعبیر مشابهی برای مساله سکه و سایر مسائلی احتمالاتی که در دبیرستان مطرح می شود نیز قابل بیان است. با این مقدمه آماده می شویم که مفهوم جمله "احتمال اینکه دو عدد طبیعی دلخواه عامل مشترکی نداشته باشند" را درک کنیم. مسلماً درک مساله می تواند راهگشای خوبی برای حل آن باشد.

2. درک مساله و تقلیل از حالت نامتناهی به متناهی

نخست مفهوم عامل مشترک را یادآوری می کنیم. منظور از عوامل یک عدد طبیعی اعداد اولیست که در تجزیه آن عدد به اعداد اول ظاهر می شود. به عنوان مثال با محاسبه ای ساده معلوم می شود که $70560 = 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ و در نتیجه عوامل عدد 70560 عبارتند از اعداد اول 2، 3، 5 و 7. گوییم دو عدد طبیعی i و j نسبت به هم اولند اگر عامل مشترکی نداشته باشند. در این صورت بزرگترین مقسوم علیه مشترک آن دو عدد برابر 1 خواهد بود، و می نویسیم $\gcd(i,j)=1$. بزرگترین مقسوم علیه مشترک خواص جالبی دارد که از آن جمله می توان به این خاصیت اشاره نمود که رابطه $\gcd(i,j)=d$ با رابطه $\gcd(\frac{i}{d},\frac{j}{d})=1$ معادل است. با تمام این توضیحات، برای بررسی "احتمال اینکه دو عدد طبیعی دلخواه عامل مشترکی نداشته باشند" یک مشکل دیده می شود و آن نامتناهی بودن اعداد طبیعی است، در حالی که در مثال تاس و سکه تعداد حالات ممکنه و حالات مورد نظر مساله متناهی بودند. چه باید کرد؟

یک روش موثر برای حل اینگونه مشکلات برگرداندن وضعیت به حالت متناهی همانند تاس و سکه می باشد. اجازه دهید مساله زیر را بررسی کنیم: "احتمال اینکه دو عدد طبیعی دلخواه که از مجموعه $\{1,2,3,\cdots,n\}$ انتخاب می شود عامل مشترکی نداشته باشند چقدر است؟"

پاسخ این احتمال را با P_n نشان می دهیم و برای به دست آوردن مقدار آن، تمامی زوجهای (i,j) از اعداد طبیعی به همراه بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان را که در آن $1 \leq j \leq i \leq n$ در آرایه ای مثلثی به صورت زیر در نظر می گیریم:

$(1,1) = 1$				
$(2,1) = 1$	$(2,2) = 2$			
$(3,1) = 1$	$(3,2) = 1$	$(3,3) = 3$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$(n,1) = 1$	$(n,2) = \gcd(2,n)$	$(n,3) = \gcd(3,n)$	$\cdots$	$(n,n) = n$

تعداد تمامی زوجها در این آرایه برابر $1+2+3+\cdots+n$ است. اگر تعداد 1های موجود در آنرا با $P(\gcd = 1)$ نشان دهیم، آنگاه داریم:

$$P_n = \frac{P(\gcd = 1)}{1+2+3+\cdots+n}.$$

لذا برای تکمیل محاسبه P_n لازمست $P(\gcd = 1)$ محاسبه گردد. برای شمارش تعداد 1ها در سطر kام آرایه بالا از تعریف تابع کامل اویلر که به تابع فی اویلر هم معروف است استفاده می کنیم. برای عدد طبیعی n تابع فی اویلر با نماد $\varphi(n)$ نشان داده شده و برابر تعداد اعداد طبیعی کمتر یا مساوی n که نسبت به n اول هستند، می باشد. یعنی

$$\varphi(n) = |\{k : 1 \le k \le n, \gcd(k, n) = 1\}|.$$

برای $1 \le k \le n$، سطر kام آرایه بالا وضعیت زیر را دارد:

$(k,1)=1$	$(k,2) = \gcd(k,2)$	$\cdots$	$(k,k-1)=1$	$(k,k)=k$

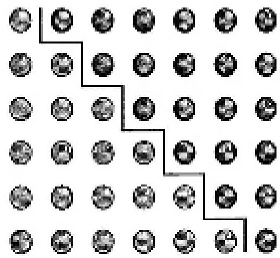
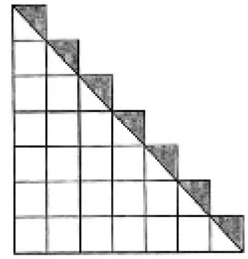
با درنظر گرفتن تعریف تابع کامل اویلر معلوم می شود که تعداد 1ها در سطر kام دقیقاً برابر $\varphi(k)$ است. در نتیجه تعداد کل $\mathbf{1}$ها در آرایه بالا برابر است با $P(\gcd = 1) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n)$. در نتیجه داریم:

$$P_n = \frac{\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n)}{1 + 2 + 3 + \cdots + n}.$$

دوستانی که با نماد $\sum$ آشنایی دارند می دانند که رابطه بالا را می توانیم به شکل بسته تر زیر بنویسیم:

$$P_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \varphi(k)}{\sum_{k=1}^{n} k}.$$

به نظر می رسد در محاسبه P_n به نقطه قابل قبولی رسیده باشیم. حتی می توانیم یک گام هم فراتر رفته و مجموع مندرج در مخرج را دقیقاً به دست آوریم. برای اینکار علاوه بر استفاده از فرمول مجموع تصاعدهای عددی، می توان از هر یک استدلالهای تصویری زیر نیز بهره گرفت. این تصاویر از منبع [2] برگرفته شده اند. یادآور می شویم درحالی که استدلال تصویری سمت راست قدمت آنچنانی ندارد، استدلال تصویری سمت چپ منسوب به یونانیان باستان می باشد.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad 1+2+3+\cdots+n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

در نتیجه، داریم:

$$P_n=\frac{2\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)}{n^2+n}.$$

مقادیر تابع کامل اویلر در جداول عددی موجود بوده و رایانه هایی که مجهز به نرم افزارهای ویژه ریاضی از قبیل Maple و Mathematica هستند نیز می توانند مقادیر آنرا حساب کنند. در جدول زیر مقدار عددی P_n برای برخی nها با کمک Maple محاسبه و بیان می شود:

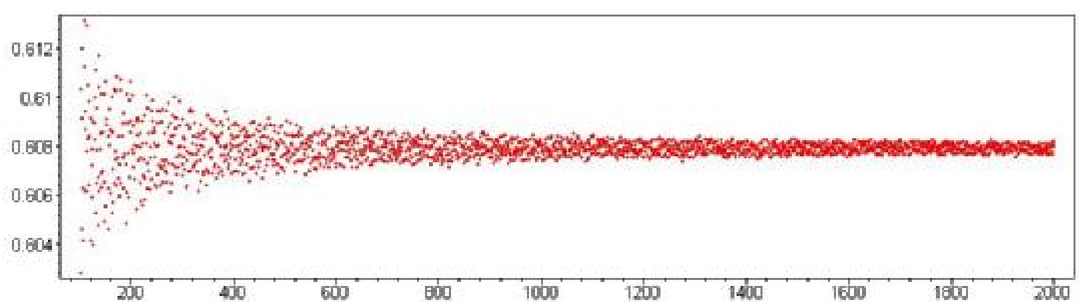
n	10	50	100	200	500	1000	5000	10000
P_n	0. 58182	0.60706	0.60277	0.60856	0.60771	0.60778	0.60792	0.60789

به نظر می رسد که با افزایش n مقدار P_n به عددی در حدود 0.60789 نزدیک می شود. به زبان دقیقتر، به نظر می رسد که حد زیر موجود و متناهی، در واقع عددی مانند P، می باشد:

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)}{n^2+n}=P.$$

اگر بتوانیم این امر را ثابت کنیم که $\lim_{n\to\infty} P_n$ وجود دارد، آنگاه توانسته ایم از حالت احتمال روی تعداد متناهی به حالت تعداد نامتناهی عبور کنیم. برای درک بهتر اینکار تصور کنید که در تمام مراحل بالا $n \to \infty$. در واقع طبق تعریف، پاسخ "احتمال اینکه دو عدد طبیعی دلخواه عامل مشترکی نداشته باشند چقدر است؟" را همان عدد P یعنی جواب $\lim_{n\to\infty} P_n$ قرار می دهیم، مشروط بر اینکه این حد موجود باشد. اثبات وجود $\lim_{n\to\infty} P_n$ کاری تکنیکی بوده و نیاز به ابزاری از نظریه تحلیلی اعداد دارد که در بخشهای بعدی به آن خواهیم پرداخت.

جهت حسن ختام این بخش نمودار زیر را که توسط Maple تهیه شده است، در نظر می گیریم. این نمودار تمام نقاط $\begin{bmatrix} n \\ P_n \end{bmatrix}$ را به ازای $100 \le n \le 2000$ در صفحه نمایش می دهد. طبق آن نه تنها P_n به عددی در حدود 0.608 میل می کند، بلکه به نظر می رسد این میل کردن با نوسانات شدیدی هم همراه است، به طوری که نمی توان گفت آیا P_n به صورت یکنوا همگراست یا خیر!؟



3. میانگین متوسط تابع کامل اویلر و به دست آوردن مقدار P

یکی از مباحث شاخه نظریه تحلیلی اعداد بررسی میانگین متوسط توابعی مانند تابع کامل اویلر می باشد. در واقع چون توابع مورد مطالعه در نظریه اعداد اغلب دارای توزیع مقادیر پیچیده، توام با نوسانات شدیدی هستند، لذا طبیعی است که با معدل گیری از مقادیر اینگونه توابع به

وضعیت یکنواخت تری برسیم. درباره تابع کامل اویلر چنین معدلی به صورت $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)$ تعریف می شود، که در واقع همان میانگین حسابی اعداد $\varphi(1)$، $\varphi(2)$، $\varphi(3)$ و ... و$\varphi(n)$ می باشد. در مورد این میانگین ثابت می شود که

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)=\frac{3}{\pi^2}n+R(n),$$

که در آن $R(n)$ تابعی است که در مقابل n بسیار ناچیز است. به زبان حدی $\lim_{n\to\infty}\frac{R(n)}{n}=0$. عجیبترین بخش رابطه بالا ظاهر شدن کسر $\frac{3}{\pi^2}$ به عنوان ضریب جمله اصلی و اثر گذار در سمت راست می باشد. توجیح ظهور عدد π در این رابطه دانشی فراتر از اطلاعات دبیرستانی می طلبد، و در اینجا برای اطلاع دبیران عزیز و دانش آموزان و دانشجویان مستعد اشاره می کنیم که برای به دست آمدن نتیجه بالا به تابع موبیوس و ارتباط آن با تابع کامل اویلر و از طرف دیگر ارتباطش با تابع زتای ریمان نیاز می باشد. اکثر کتابهای نظریه تحلیلی اعداد اثبات دقیقی از این موضوع را در بر دارد. در این راستا خواننده را به منبع [1] ارجاع می دهیم. آنچه در این بخش مهم است اینست که هم اکنون در وضعیتی هستیم که بتوانیم به سوال مطرح شده در عنوان مقاله پاسخ دهیم. با در نظر گرفتن توضیحات بخش قبل داریم:

$$P=\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)\right).$$

حال اگر رابطه بالا در باره $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)$ را استفاده کنیم نتیجه می گیریم:

$$P=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{3}{\pi^2}n+R(n)\right)=\frac{6}{\pi^2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}+2\lim_{n\to\infty}\frac{R(n)}{n+1}.$$

در رابطه اخیر $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ بوده، و با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty}\frac{R(n)}{n}=0$، داریم $\lim_{n\to\infty}\frac{R(n)}{n+1}=0$. نتیجه اینکه

$$P=\frac{6}{\pi^2}.$$

این به معنای اینست که "احتمال اینکه دو عدد طبیعی دلخواه عامل مشترکی نداشته باشند برابر $\%61 \cong \frac{6}{\pi^2}$ است".

فهرست منابع

[1] Tom. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1976.

[2] Roger B. Nelsen, *Proofs Without Words (Exercises in Visual Thinking)*, MAA, 1993.