دانشگاه زنجان

دانشکده مهندسی

گروه کارشناسی برق

عنوان: روشهای کاهش مرتبه سیستمهای مرتبه بالا

پدیدآورنده: شادی خردزارع

استاد راهنما: دکتر ابوالفضل جلیلوند

تابستان ۹۵

تقدیر و تشکر:

از استاد باکمالات و شایسته؛جناب آقای دکتر ابوالفضل جلیلوند که در کمال سعه صدر،حسن خلق و فروتنی،از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پروژه را بر عهده گرفتند؛کمال تشکر و قدردانی را دارم.

چکیده:

در مراجع کاهش مرتبه معادلات فضای حالت سیستم در دو حالت جداگانه بررسی می‌گردد. نخست کاهش معادلات غیر می‌نیمال فضای حالت یا به عبارتی حذف قطب‌های کنترل‌ناپذیر، رویت‌ناپذیر و یا هر دو از مجموعه‌ی معادلات سیستم و بدست آوردن یک نمایش کنترل پذیر و رویت پذیر است و در دوم که هدف اصلی این پایان نامه است، به کاهش مرتبه‌ی معادلات فضای حالت کنترل پذیر و رویت‌پذیر یا به عبارتی می-نیمال می‌پردازد. این موضوع بسیاری کاربردی است و در بسیاری از طراحی‌های مقاوم سیستم‌های کنترلی بکار گرفته می شود. در واقع کاهش مرتبه را می‌توان به معادلات دستگاه یا کنترل کننده اعمال کرده و معادلات مرتبه پایین‌تر را بدست آورد. محور اصلی کاهش مرتبه‌ی سیستم‌های می‌نیمال، تعیین حالت‌هایی از سیستم است که کم‌تر کنترل‌پذیر و یا رویت‌پذیر هستند و سپس حذف آنها.

برای این منظور دو روش عمده در مراجع به نام کاهش مرتبه به وسیله برش و کاهش مرتبه با روش مانده‌گذاری وجود دارد که در فصل اول هر دوی این روش‌ها مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. خواهیم دید که مکان قطب به تنهایی معیار درستی برای انتخاب مرتبه کاهش نیست و میزان یا درجه کنترل پذیری و رویت‌پذیری نیز می‌تواند تعیین کننده باشد. بنابراین در فصل دوم برای شروع روش موثر و کاربردی تحقق بالانس شده برای کاهش مرتبه مدل دینامیکی را بیان می‌کنیم. سپس با بیان مختصری از مبحث نامساوی-های ماتریسی خطی وارد الگوریتم دوم کاهش مرتبه می‌شویم و آنرا به صورت مفصل بیان می‌کنیم. لازم به ذکر است که هر دوی این روش‌ها تنها برای سیستم‌های پایدار مجانبی پاسخ‌گو هستند و لذا به عنوان روش سوم وارد بحث کاهش مرتبه برای معادلات فضای حالت ناپایدار می‌شویم و مراحل آنرا بیان می‌کنیم.

در فصل سوم به صورت مفصل به شبیه‌سازی تمامی سه الگوریتم بیان شده در فصل دوم می‌پردازیم و آنها را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. نتیجه کلی آن خواهد بود که برای سیستم‌های پایدار مجانبی، روش بیان شده با نامساوی‌های ماتریسی، کران پایین‌تری برای خطای تخمین ارائه می دهد و لذا آنرا به عنوان بهترین الگوریتم انتخاب می‌کنیم.

کلید واژه‌ها: کاهش مرتبه، تحقق بالانس شده، نامساوی‌های ماتریسی خطی، می‌نیمال بودن تحقق

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فهرست شکل ها

فصل اول

مقدمه‌ای بر کاهش مرتبه معادلات فضای حالت

۱-۱- مقدمه

کاهش مرتبه معادلات فضای حالت سیستم در دو حالت جداگانه بررسی می گردد. نخست کاهش معادلات غیر می نیمال فضای حالت یا به عبارتی حذف قطب های کنترل ناپذیر، رویت ناپذیر و یا هر دو از مجموعه ی معادلات سیستم و بدست آوردن یک نمایش کنترل پذیر و رویت پذیر است. کاربرد اصلی این ایده در بدست آوردن نمایش های می نیمال فضای حالت از تحقق های غیر می نیمال است و این ایده بیشتر مربوط به استخراج تحقق می نیمال برای سیستم های چند متغیره می باشد. زیرا در این سیستم ها نظریه تحقق مستقیماً از سیستم های یک ورودی-یک خروجی به سیستم های چند ورودی-چند خروجی تعمیم داده می شود و لذا در بسیاری حالات، نتایج بدست آمده به صورت تحقق های غیرمی نیمال است و می بایست با حذف مودهای کنترل ناپذیر و رویت ناپذیر، تحقق می نیمال را بدست آورد که این بحث از این نوشتار خارج است و برای توضیح بیشتر الگوریتم بیان شده می توان به مرجع [1] مراجعه نمود.

در قسمت دوم که هدف اصلی این پایان نامه است، به موضوعی کاملاً متفاوت از آنچه در بالا بیان شد می پردازیم و در آن هدف کاهش مرتبه ی معادلات فضای حالت کنترل پذیر و رویت پذیر و یا می نیمال است. این موضوع بسیاری کاربردی است و در بسیاری از طراحی های مقاوم سیستم های کنترلی بکار گرفته می شود. در واقع کاهش مرتبه را می توان به معادلات دستگاه یا کنترل کننده اعمال کرده و معادلات مرتبه پایین تر را بدست آورد. محور اصلی کاهش مرتبه ی سیستم های می نیمال، تعیین حالت هایی از سیستم است که کم تر کنترل پذیر و یا رویت پذیر هستند و سپس آنها را حذف می کنیم.

در این فصل به بیان مقدماتی از کاهش مرتبه معادلات فضای حالت می نیمال می پردازیم و ۲ روش اصلی برش و مانده گذاری را بیان می کنیم و با بیان مشکل اصلی این دو روش، وارد بحث تحقق های بالانس شده می شویم و مقدمه ای از آنرا در این بخش می آوریم. در انتها نیز ساختار اصلی این نوشتار را بیان خواهیم کرد.

در این نوشتار معادلات دینامیکی سیستم به صورت فضای حالت LTI و کنترل پذیر و رویت پذیر به صورت رابطه زیر بیان می شوند:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad G(s) := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{۱-۱}$$

که در آن $x \in R^n$، $u \in R^m$، $y \in R^l$ و ماتریس های A، B، C و D ثابت و با ابعاد مناسب هستند. فرض کنید که بخواهیم مرتبه سیستم می نیمال را از n به r کاهش دهیم. به عبارتی سیستم بیان شده با معادله (۱-۱) را با معادلات مرتبه r ای چنان نمایش دهیم که مشخصه های اصلی سیستم حفظ شده و خطای کاهش مرتبه حداقل باشد.

معادله(۱-۱) را با افراز مناسب بردار $x(t)$ و ماتریس های داده شده می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) \\ y(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + Du(t) \end{cases} \tag{۲-۱}$$

که در آن $x_1 \in R^r$، $x_2 \in R^{n-r}$ و ماتریس های ثابت با ابعاد مناسب هستند. هدف از کاهش مرتبه حذف $n-r$ متغیر حالت x_2 از معادلات بالاست. برای انجام این کار دو روش متداول عبارت اند از:

- روش برش
- روش مانده گذاری

۱-۲- روش برش

در این روش بخش مربوط به x_2 در معادله(۱-۲) برش داده شده و معادلات مرتبه کاهش یافته به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + B_1u(t) \\ y(t) = C_1x_1(t) + Du(t) \end{cases} \quad (۱-۳)$$

اگر ماتریس تابع تبدیل متناظر با معادلات اصلی و مرتبه کاهش یافته ی سیستم را به ترتیب با $G(s)$ و $G_r(s)$ نمایش دهیم، پر واضح است که $G(s) = G_r(s)=D$ و لذا کاهش مرتبه به روش برش، پاسخ فرکانس بالای سیستم را تغییر نمی دهد. توجه شود که در مدل مرتبه کاهش یافته با روش برش مدال، قطب های سیستم مرتبه کاهش یافته تعدادی از قطب های سیستم اصلی هستند.

اگر نمایش فضای حالت سیستم به صورت قطری یا کانونیکال جردن باشد، حالت های x_2 را متناظر با قطب های سریع یا غیرغالب انتخاب می کنیم. برای مثال اگر:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (۱-۴)$$

که در آن مقادیر ویژه سیستم به صورت $|\lambda_1|<|\lambda_2|<\cdots<|\lambda_n|$ مرتب شده اند. اگر با روش برش $n-r$ مودهای سریع سیستم را حذف کنیم، داریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_r^T \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_r \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (۱-۵)$$

در این حالت خطای برش را می توان با تفاضل ماتریس های تبدیل متناظر به صورت زیر تعیین کرد:

$$G(s)-G_r(s)=\sum_{i=r+r}^{n}\frac{c_i b_i^T}{s-\lambda_i}$$
$$\Rightarrow \|G(s)-G_r(s)\| \le \sum_{i=r+r}^{n}\frac{\bar{\sigma}(c_i b_i^T)}{|\mathrm{Re}(\lambda_i)|} \qquad ۶-۱$$

که در آن $C_i b_i^T$ ماتریس مانده تابع تبدیل قطب از قطب λ_i و $\bar{\sigma}(.)$ بزرگ ترین مقدار استثنایی را نشان می دهد. لذا در تحلیل کاهش مرتبه به روش برش باید علاوه بر دوری قطب از محور موهومی به مقدار بزرگ ترین مقدار استثنایی ماتریس مانده ی آن قطب نیز توجه کرد و موقعیت قطب به تنهایی معیار دقیقی برای حذف یا نگه داری یک قطب در مدل مرتبه کاهش یافته نیست و این مشکل اصلی روش برش است.

۱-۳- روش مانده گذاری

این روش که آن را روش آشفتگی های تکین نیز می نامند، روشی برای کاهش مرتبه مدل سیستم داده شده با معادله(۱-۲) است. با فرض آنکه x_2 متغیرهای حالت سریع و متناظر با رفتار غیرغالب سیستم باشد، داریم $\dot{x}_2=0$. این بدان معناست که متغیرهای حالت x_2 به سرعت به حالت ماندگار رسیده و در حالت گذرای پاسخ سیستم نقشی ندارند. در روش برش، اثر آنها به طور کلی حذف شده است و حال آنکه در روش مانده گذاری اثر آنها را در سایر حالت ها مورد توجه قرار می دهیم. از معادله دوم از رابطه(۱-۲) داریم:

$$0=A_{21}x_1(t)+A_{22}x_2(t)+B_2u(t)$$

که با فرض $|A_2|\neq 0$ و حل معادله بالا برای x_2، معادلات سیستم به صورت زیر کاهش می یابند:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=\left(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)x_1(t)+\left(B_1-A_{12}A_{22}^{-1}B_2\right)u(t)\\ y(t)=\left(C_1-C_2A_{22}^{-1}A_{21}\right)x_1(t)+\left(D-C_2A_{22}^{-1}B_2\right)u(t)\end{cases} \qquad ۷-۱$$

و با کمی جلوتر رفتن روند بالا، مشاهده می شود که:

$$G_r(0)=G(0)$$

و لذا رفتار حالت ماندگار سیستم کاهش یافته همانند سیستم اصلی خواهد بود. اما توجه شود که:

$$G_r(\infty) = D - C_2 A_{22}^{-1} B_2$$

و لذا رفتار حالت گذرای آن کاملاً متفاوت است.

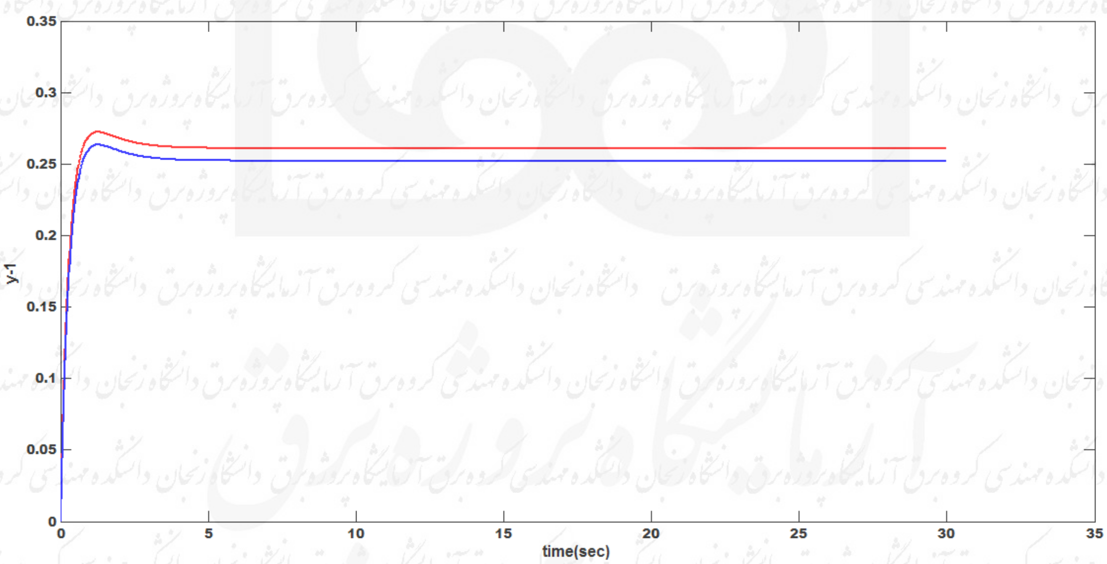
۱-۴- نتایج شبیه‌سازی روش‌های برش و مانده‌گذاری

برای نمایش بهتر این دو روش بیان شده در بالا یک مثال شبیه‌سازی به صورت تابع تبدیل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{s^3 + 11s^2 + 36s + 26}{s^4 + 14.6s^3 + 74.96s^2 + 153.7s + 99.65} \qquad ۸-۱$$

۱-۴-۱- روش برش

فرض کنیم که مرتبه سیستم کاهش یافته را ۲ انتخاب کنیم. در شکل ۱-۱ پاسخ پله سیستم اصلی و سیستم کاهش مرتبه یافته و در شکل ۱-۲ مقدار استثنایی سیستم اصلی و کاهش مرتبه یافته را مشاهده می‌کنید.



شکل ۱-۱: پاسخ پله سیستم اصلی (رنگ قرمز) و سیستم کاهش مرتبه یافته (رنگ آبی)

دانشجویان محترم:

جهت دسترسی به متن کامل پایان نامه‌ها به کتابخانه دانشکده مهندسی و یا آزمایشگاه پروژه گروه برق مراجعه فرمایید.

با توجه به آنکه تحقق به فرم بالانس شده در آمده است، می توان کاهش مرتبه را به بخش پایدار بالانس شده آن اعمال نمود. با توجه به مقادیر استثنایی هانکل در رابطه بالا، بهترین درجه برای کاهش مرتبه بخش پایدار آن ۲ است و با اعمال آن، تحقق بالانس شده سیستم عبارت خواهد بود با:

$$A_r = \begin{bmatrix} -2.3577 & 0.7139 & 0 \\ 0.7139 & -1.6479 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B_r = \begin{bmatrix} -3.6951 \\ -0.5791 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{۱۴-۳}$$

$$C_r = \begin{bmatrix} 3.6951 & -0.5791 & 4 \end{bmatrix}$$

۳-۴- نتیجه گیری:

در این فصل به شبیه سازی ۳ الگوریتم بیان شده در فصل دوم برای کاهش مرتبه تحقق های فضای حالت پرداختیم و نتایج بدست آمده از الگوریتم اول (تحقق بالانس شده) و الگوریتم دوم (بدست آمده از LMI ها) را با هم مقایسه کردیم. نتایج بخوبی حاکی از برتری الگوریتم دوم بر اول می باشد.

فهرست مراجع

[1] دکتر خاکی صدیق، تحلیل و طراحی سیستم های کنترل چندمتغیره، داشنگاه صنعتی خواجه نصیر، ۱۳۹۳

[2] D Ankelhed, A Helmersson, A Hansson, "***Suboptimal model reduction using LMIs with convex constraints***" European Control Conference, 2007

[3] Andreas Keil, and Jean-Luc Gouzé, ***Model reduction of modular systems using balancing methods***.

[4] Mohammed Dahleh, Munther A. Dahleh, ***Balanced Realization***, Lectures on Dynamic Systems and Control, Department of Electrical Engineering and Computer Science, MIT.

[5] KEMIN ZHOU, GREGORY SALOMON, ***BALANCED REALIZATIONAND MODEL REDUCTION FOR UNSTABLE SYSTEMS***, Int. J. Robust Nonlinear Control 9, 183-198 (1999)