

چکیده مبسوط مقالات پنجمین سمینار آنالیز تابعی و کاربردهای آن

۲۱-۲۲ تیرماه ۱۳۹۶

تدوین

سعید مقصودی

علی شکری

علی مرصعی



مرکز منطقه‌ای اطلاع‌رسانی علوم و فناوری

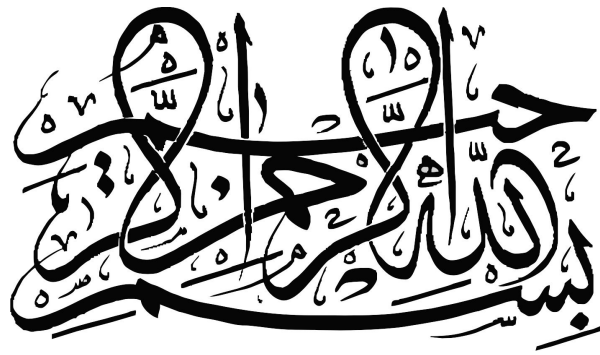


جمهوری اسلامی ایران

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری



پایگاه استادی علوم جهان اسلام





پنجمین سمینار آنالیز تابعی و کاربردهای آن، ۲۲-۲۱ تیر ماه ۱۳۹۶، دانشگاه زنجان

چکیده مبسوط مقالات پنجمین سمینار آنالیز تابعی و کاربردهای آن

۲۱-۲۲ تیرماه ۱۳۹۶، دانشگاه زنجان

تدوین

سعید مقصودی

علی شکری

علی مرصعی

زنجان، ۱۳۹۶

چکیده مبسوط مقالات پنجمین سمینار آنالیز تابعی و کاربردهای آن، ۲۲-۲۱ تیرماه ۱۳۹۶، زنجان
تدوین: سعید مقصودی، علی شکری، علی مرصعی
صفحه‌آرایی و امور فنی: علی مرصعی، علی شکری
کمیته برگزارکننده سمینار، زنجان، ۱۳۹۶
چاپ و صحافی: فانوس
کد اختصاصی همایش در ISC: ۹۶۱۶۱-۲۲۴۰۱

مقدمه

پنجمین سمینار آنالیز تابعی و کاربردهای آن در روزهای ۲۲-۲۱ تیرماه ۱۳۹۶ در دانشگاه زنجان برگزار شد. این سمینار از جمله سمینارهای تخصصی دوسالانه انجمن ریاضی است که به همت دکتر محمد صالح مصلحیان پس از تجمیع اینگونه سمینارها در سمینار سالانه آنالیز ریاضی و کاربردهای آن مجدداً احیا شده‌اند. شرط بقای اینگونه سمینارهای تخصصی، که برگزاری آن‌ها مخالفانی نیز دارد، میزان استقبال شرکت‌کنندگان و کیفیت مقالات ارائه‌شده در آن‌ها است.

در این سمینار از حدود ۱۰۰ مقاله‌ای که به دبیرخانه رسید پس از کسب نظر از حداقل دو نفر متخصص مربوط، ۶۳ مقاله به صورت سخنرانی و ۵ مقاله به صورت پوستر پذیرفته شد. همچنین ۴ سخنران مدعو نیز سخنرانی خود را به صورت عمومی ایراد کردند. ما در این گزارش طبق مقررات انجمن ریاضی صرفاً مقالاتی را که در روزهای برگزاری سمینار ارائه شده‌اند آورده‌ایم.

قطعا برگزاری این سمینار کار یک نفر و یا حتی یک گروه نبوده است و در برگزاری آن افراد و سازمان‌های مختلفی در کنار کمیته برگزارکننده بوده‌اند. فرصت را غنیمت می‌شماریم و زحمات و حمایت‌های آن‌ها را ارج می‌گذاریم و از همه آن‌ها تشکر می‌کنیم. به‌ویژه از ریاست دانشگاه و کلیه قسمت‌های مربوط (معاونت دانشجویی، روابط عمومی، امور حمل و نقل، حراست، تاسیسات و نگهداری، انفورماتیک)، معاونت پژوهشی و فناوری، ریاست دانشکده علوم و مسئول امور عمومی دانشکده علوم صمیمانه سپاسگزاریم. همچنین منت‌دار انجمن ریاضی، ریاست محترم و دو نماینده آن انجمن هستیم. از کمک‌های حامیان این سمینار - شهرداری زنجان، اداره کل میراث فرهنگی، صنایع دستی و گردشگری، مدیریت بانک تجارت استان، مرکز منطقه‌ای اطلاع‌رسانی علوم و فناوری و پایگاه استنادی علوم جهان اسلام - نیز تشکر و قدردانی می‌کنیم.

سعید مقصودی

حمایت‌کنندگان سمینار



کمیته‌ها

کمیته برگزارکننده

- دکتر فرض‌اله میرزاپور (رئیس دانشکده علوم)
- دکتر محسن نجفیان (معاون دانشجویی دانشگاه)
- دکتر سعید مقصودی (دبیر و دبیر علمی سمینار)
- دکتر حبیب امیری (دبیر اجرایی سمینار)
- دکتر مهدی حسنی (مدیر گروه ریاضی)
- دکتر پرویز احمدی
- دکتر هادی خطیب‌زاده
- دکتر محمدتقی دستجردی
- دکتر علی شکری
- دکتر محمدباقر کاظمی
- دکتر علی مرصعی
- دکتر فاطمه‌سادات موسوی

کمیته علمی

- دکتر علی آبکار (دانشگاه بین‌المللی امام خمینی قزوین، نماینده انجمن ریاضی)
- دکتر یوسف استارمی (دانشگاه پیام نور)

- دکتر حبیب امیری (دانشگاه زنجان)
- دکتر عبدالرسول پورعباس (دانشگاه صنعتی امیرکبیر)
- دکتر محمدرضا جبارزاده (دانشگاه تبریز)
- دکتر هادی خطیب‌زاده (دانشگاه زنجان)
- دکتر مهدی رجبعلی‌پور (دانشگاه شهید باهنر کرمان و فرهنگستان علوم)
- دکتر جمال رویین (دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان)
- دکتر جعفر زعفرانی (دانشگاه اصفهان و دانشگاه شیخ بهایی)
- دکتر محمد صال‌مصلحیان (دانشگاه فردوسی مشهد)
- دکتر فرشید عبداللهی (دانشگاه شیراز)
- دکتر علیرضا مدقالچی (دانشگاه خوارزمی، نماینده انجمن ریاضی)
- دکتر علی مرصعی (دانشگاه زنجان)
- دکتر سعید مقصودی (دانشگاه زنجان)
- دکتر میثم میثمی صدر (دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان)
- دکتر فرض‌اله میرزاپور (دانشگاه زنجان)

سخنرانان مدعو

- دکتر مهدی رجبعلی‌پور (دانشگاه شهید باهنر کرمان و فرهنگستان علوم)
- دکتر مسعود امینی (دانشگاه تربیت مدرس)
- دکتر علیرضا امینی هرنندی (دانشگاه اصفهان)
- دکتر محمد صال‌مصلحیان (دانشگاه فردوسی مشهد)

فهرست مطالب

صفحه	مؤلف و عنوان مقاله
۱	سخنرانی‌های تخصصی
۳	حسن فتحی و محمود حاجی‌شعبانی عملگرهای خطی فشرده روی فضاهاى نرم‌دار احتمالی
۷	مرجان نظری، کاظم نوری و باقر کرامتی بررسی وجود و یکتایی جواب برای دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل-انتگرال تاخیری از مرتبه‌ی کسری
۱۳	پوسترها
۱۵	محمدصادق قانعى بافقى و على مرصّعى کلاسی از توابع به‌طور کامل یکنوا
۱۹	محمدباقر کاظمی و مریم رسولی انحنای هولومورفیک با التصاق غیرمتریک روی منیفلدهای تقریباً تماسی لورنتزی
۲۳	محمدباقر کاظمی و صغری طریقی ضرب تابیده در منیفلدهای تماسی متریک و منیفلدهای تقریباً مختلط
۲۷	سخنرانی‌های عمومی
۲۹	مهدی رجبعلی‌پور تاریخچه آنالیز تابعی در ایران
۳۱	محمد صال‌مصلحیان مقاله‌های عجیب و غریب

سخنرانی‌های تخصصی



عملگرهای خطی فشرده روی فضاهای نرمدار احتمالی

حسن فتحی^۱ * و محمود حاجی شعبانی^۲

^۱ استهبان، دانشگاه آزاد اسلامی واحد استهبان
fathi_hassan59@yahoo.com

^۲ دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز
shaabani@sutch.ac.ir

چکیده. در این مقاله به بررسی عملگرهای خطی فشرده روی فضاهای نرمدار احتمالی پرداخته و رابطه این عملگرها با عملگرهای پیوسته ضعیف و پیوسته قوی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱. پیش‌گفتار

در سال ۱۹۶۳ شرتنف [۵] تعریفی از فضاهای نرمدار احتمالی ارائه نمود. در واقع وی سعی کرد فاصله دو نقطه را در این فضاها به صورت یک تابع توزیع معرفی کند. بعد از آن در سال ۱۹۹۳، آلسینا، شوایزر و اسکالر [۱] تعریف جدیدی ارائه دادند که این تعریف شباهت بیشتری با فضاهای متریک معمولی داشت. در این مقاله ابتدا به بیان چند تعریف از جمله تابع توزیع فاصله می‌پردازیم که در ادامه بتوانیم فضاهای نرمدار احتمالی را تعریف کنیم.

تعریف ۱.۱. تابع $[0, 1] \rightarrow [-\infty, +\infty]$ را F تابع توزیع فاصله گویند هرگاه این تابع صعودی، پیوسته چپ باشد و $F(-\infty) = 0$ ، $F(+\infty) = 0$. مجموعه تمام این توابع را با Δ نمایش می‌دهند. Δ^+ را تمام اعضای Δ که دارای خاصیت $F(0) = 0$ هستند تعریف می‌کنند.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 47S50; Secondary: 54E70.

واژگان کلیدی. فضاهای نرمدار احتمالی، عملگرهای خطی فشرده، فضاهای منگر.
* سخنران

همچنین D^+ را تمام اعضای Δ^+ با شرط $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$ و $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$ در نظر می‌گیرند. به ازای هر $a \in \mathbb{R} = [-\infty, +\infty]$ ، ε_a را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon_a(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ 1 & t > a. \end{cases}$$

بوضوح ε_a ها اعضای Δ هستند. این توابع نقشی اساسی در فضاهاى نرم‌دار احتمالی ایفا می‌کنند. تعریف‌های زیر را از [۴] یادآوری می‌کنیم.

- تعریف ۲.۱.** (۱) عملگر دوتایی T روی $[0, 1]$ را یک t -نرم گویند هرگاه صعودی، جابجایی، شرکت‌پذیر و ۱ عضو همانی آن باشد.
- (۲) عملگر دوتایی τ روی Δ^+ را یک تابع مثلث گویند هرگاه τ صعودی، جابجایی، شرکت‌پذیر و ۰ عضو همانی آن باشد.
- (۳) اگر T یک t -نرم پیوسته چپ باشد، در این صورت عملگر دوتایی τ_T روی Δ^+ که به صورت زیر تعریف می‌شود یک تابع مثلث تعریف می‌کند

$$\tau_T(F, G)(x) = \sup\{T(F(u), G(v)) : u + v = x\}.$$

- (۴) فرض کنید V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ ، ν یک تابع به صورت $\nu : V \rightarrow \Delta^+$ و τ یک تابع مثلث پیوسته باشد. در این صورت سه تایی (V, ν, τ) را یک فضای نرم‌دار احتمالی گویند هرگاه به ازای هر $p, q \in V$ و $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ خواص زیر برقرار باشند:

$$\nu_p = \varepsilon_0 \Leftrightarrow p = 0 \quad (N_1)$$

$$\nu_{\alpha p}(x) = \nu(x/|\alpha|) \quad (N_2)$$

$$\nu_{p+q} \geq \tau(\nu_p, \nu_q) \quad (N_3)$$

در صورتی که τ را برابر با τ_T در نظر بگیریم آن را فضای منگر می‌نامند.

۲. نتایج اصلی

در هر فضای متریک خصوصاً فضای نرم‌دار، عملگرهای خطی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. یکی از ویژگی‌های مهم عملگرهای خطی در فضای نرم‌دار، پیوستگی و کراندار بودن است. همان‌طور که می‌دانیم هر عملگر خطی روی فضای نرم‌دار متناهی بعد همواره پیوسته و کراندار است. در این قسمت به بررسی عملگرهای خطی روی فضای نرم‌دار احتمالی پرداخته و شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت این شرایط احکامی که در فضای نرم‌دار برقرار بودند در فضای نرم‌دار احتمالی نیز برقرار باشند.

تعریف ۱.۲. فرض کنید (V, ν, τ) یک فضای نرم‌دار احتمالی باشد، همچنین فرض کنید که $\{x_n\}$ یک دنباله در V باشد. گوئیم دنباله $\{x_n\}$ ، ν -همگرا به x است و می‌نویسیم $x_n \xrightarrow{\nu} x$ یا $x_n \rightarrow x$ اگر به ازای هر $t > 0$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{x_n - x}(t) = 1$.

تعریف ۲.۲ ([۳]). فرض کنید (X, ν, τ) و (Y, ν', τ') دو فضای نرم‌دار احتمالی و عملگر خطی T به صورت $T : (X, \nu, \tau) \rightarrow (Y, \nu', \tau')$ باشد. در این صورت عملگر T :

الف) در نقطه z متعلق به X را به طور ضعیف پیوسته گویند اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ و $\alpha \in (0, 1)$ ، $\delta > 0$ موجود باشد بطوری که برای هر $x \in X$ اگر $\nu_{x-z}(\delta) > \alpha$ و

$$\nu'_{T(x)-T(z)}(\varepsilon) \geq \alpha$$

ب) روی X به طور ضعیف پیوسته گویند اگر T در هر نقطه از X ، به طور ضعیف پیوسته باشد.

ج) در X به طور قوی پیوسته گویند هر گاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ موجود باشد بطوری که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\nu'_{T(x)-T(z)}(\varepsilon) \geq \nu_{x-z}(\delta)$

د) روی X به طور ضعیف کراندار گویند هرگاه برای هر $\alpha \in (0, 1)$ ، $m_\alpha > 0$ موجود باشد بطوری که برای هر $x \in X$ و $t \in \mathbb{R}$ ، اگر $\nu_x(\frac{t}{m_\alpha}) \geq \alpha$ آنگاه $\nu'_{T(x)}(t) \geq \alpha$

مجموعه تمام عملگرهای به طور ضعیف کراندار از (X, ν, τ) به (Y, ν', τ') را با $WB(X, Y)$ نمایش می دهند.

ه) روی X به طور قوی کراندار گویند اگر عدد حقیقی مثبت M موجود باشد بطوری که برای هر $x \in X$ و $t \in \mathbb{R}$ ، داشته باشیم $\nu'_{T(x)} \geq \nu_x(t/M)$

تعریف ۳.۲ ([۳]). فرض کنید (V, ν, τ) یک فضای نرمدار احتمالی باشد.

(۱) زیرمجموعه B را ν -کراندار گویند اگر $t > 0$ و $r < 1$ وجود داشته باشد بطوری که برای هر $x \in B$ داشته باشیم $\nu_x(t) > 1 - r$

(۲) زیرمجموعه E را در نظر بگیرید. مجموعه همه $x \in X$ را که برای هر x دنباله $\{x_n\}$ از اعضای E موجود باشد بطوری که $x_n \rightarrow x$ ، را ν -بستار E نامیده و به صورت $\overline{E}$ نمایش می دهند. همچنین مجموعه E را ν -بسته نامند اگر $E = \overline{E}$.

(۳) مجموعه A را فشرده گویند اگر هر دنباله از اعضای A یک زیردنباله ν -همگرا داشته باشد.

تعریف ۴.۲. فرض کنید (X, ν, τ) و (Y, ν', τ') دو فضای نرمدار احتمالی باشد. در این صورت عملگر $T : (X, \nu, \tau) \rightarrow (Y, \nu', \tau')$ را عملگر فشرده می نامند اگر برای هر زیرمجموعه ν -کراندار M از X ، زیرمجموعه $T(M)$ از Y مجموعه فشرده نسبی باشد، به این معنی که ν -بستار $T(M)$ مجموعه ν -فشرده باشد.

قضیه ۵.۲. فرض کنید (X, ν, τ) و (Y, ν', τ') دو فضای نرمدار احتمالی و عملگر T به صورت $T : (X, \nu, \tau) \rightarrow (Y, \nu', \tau')$ باشد. در این صورت T فشرده است اگر و تنها اگر T ، هر دنباله ν -کراندار $\{x_n\}$ در X را به دنباله $\{T(x_n)\}$ در Y ، که حاوی یک زیر دنباله ν -همگرا می باشد، تصویر کند.

در این قسمت قضیه ای را بیان می کنیم که در واقع مهم ترین قضیه این مقاله است و با استفاده از این قضیه ارتباط بین یک فضای نرمدار و فضای نرمدار احتمالی مشخص می شود.

قضیه ۶.۲ ([۲]). فرض کنید (V, ν, τ) یک فضای نرمدار احتمالی با خاصیت زیر باشد:

$$N_{\neq} \text{ اگر به ازای هر } t \in \mathbb{R}^+, \nu_x(t) > 0, \text{ آنگاه } x = 0.$$

اگر به ازای هر $\alpha \in (0, 1)$ تعریف کنیم

$$\|x\|_\alpha = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : \nu_x(t) \geq \alpha\}$$

آنگاه مجموعه $\{\|x\|_\alpha : \alpha \in (0, 1)\}$ تشکیل خانواده‌ای از نرم‌ها می‌دهد که به این نرم‌ها، نرم‌های افزاینده α روی V متناظر با تابع ν می‌گویند.

قضیه ۷.۲. فرض کنید (X, ν, τ) یک فضای نرم‌دار احتمالی با خاصیت (N_4) و برای هر عضو ثابت $x \in X$ یک تابع پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشد. آنگاه X متناهی‌بعد است اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in (0, 1)$ و $r > 0$ $B_\alpha[x, r] = \{y \in X : \nu_{x-y}(r) \geq \alpha\}$ مجموعه ν -فشرده در X باشد.

لم ۸.۲. فرض کنید (X, ν, τ) و (Y, ν', τ') دو فضای نرم‌دار احتمالی با خاصیت (N_4) و $T : (X, \nu, \tau) \rightarrow (Y, \nu', \tau')$ عملگر فشرده باشد، آنگاه برای هر $\alpha \in (0, 1)$ $T : (X, \|\cdot\|_\alpha) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_\alpha)$ عملگر فشرده در معنای معمول است.

قضیه ۹.۲. فرض کنید (X, ν, τ) و (Y, ν', τ') دو فضای نرم‌دار احتمالی با خاصیت (N_4) باشد، در این صورت داریم:

(۱) هر عملگر خطی فشرده $T : (X, \nu, \tau) \rightarrow (Y, \nu', \tau')$ پیوسته ضعیف است.

(۲) اگر بعد X نامتناهی باشد، آنگاه عملگر همانی $I : (X, \nu, \tau) \rightarrow (Y, \nu', \tau')$ فشرده نیست.

قضیه ۱۰.۲. فرض کنید (X, ν, τ) و (Y, ν', τ') دو فضای نرم‌دار احتمالی و عملگر T از (X, ν, τ) به (Y, ν', τ') فشرده و همچنین $S : (X, \nu, \tau) \rightarrow (Y, \nu, \tau)$ عملگر خطی پیوسته قوی باشد، آنگاه TS و ST عملگرهای فشرده‌اند.

قضیه ۱۱.۲ ([۳]). فرض کنید (X, ν, τ) و (Y, ν', τ') دو فضای نرم‌دار احتمالی با خاصیت (N_4) ، $T : (X, \nu, \tau) \rightarrow (Y, \nu', \tau')$ عملگر خطی و بعد X متناهی باشد، در این صورت T پیوسته ضعیف است.

مراجع

1. C. Alsina, B. Schweizer and A. Sklar, *On the definition of a probabilistic normed space*, Aequationes Math., 49 (1993), 91–98.
2. T. Bag and S. K. Samanta, *Finite dimensional fuzzy normed linear spaces*, J. Fuzzy Math., 11 (2003), 687–705
3. T. Bag and S. K. Samanta, *Fuzzy bounded linear operators*, Fuzzy Sets and Systems, 151 (2005), 513–547.
4. B. Schweizer and A. Sklar, *Probabilistic metric space*, Elsevier North-Holland, New York, 1993.
5. A. N. Sherstnev, *On the notion of a random normed space*, Dokl. Akad. Nauk SSSR., 149 (1963), 280–283.



بررسی وجود و یکتایی جواب برای دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل-انتگرال تاخیری از مرتبه‌ی کسری

مرجان نظری^{*}، کاظم نوری، و باقر کرامتی

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه سمنان

m.n_nazari@semnan.ac.ir

knouri@semnan.ac.ir

bkeramati@semnan.ac.ir

چکیده. هدف ما در این مقاله بررسی وجود و یکتایی جواب برای دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل-انتگرال تاخیری از مرتبه‌ی کسری است. ابزار ما برای این کار محاسبات کسری و قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت باناخ است.

۱. پیش‌گفتار

در این مقاله دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل-انتگرال تاخیری از مرتبه‌ی کسری به شکل زیر مورد مطالعه قرار گرفته است:

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x(t) = f(t, x_t, Kx(t)) & (t \in J = [0, T], 0 < \alpha \leq 1) \\ x_0 = \phi \end{cases} \quad (1.1)$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 47A55; Secondary: 39B52.

واژگان کلیدی. مشتق کسری کاپوتو، معادلات دیفرانسیل-انتگرال، وجود و یکتایی جواب، قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت باناخ.
* سخنران

که در اینجا ${}^c D^\alpha$ مشتق کسری کاپوتو و $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times C([-\tau, 0]; \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع f پیوسته است. به ازای هر $x : [-\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad (t \in [0, T], \theta \in [-\tau, 0])$$

همچنین تابع $([0, \infty) \times [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R})$ را طوری در نظر می‌گیریم که

$$Kx(t) = \int_0^t k(t, s)x(s)ds$$

و $k_* = \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t k(t, s)ds \right|$. اخیرا معادلات دیفرانسیل با مرتبه‌ی کسری کاربردهای گسترده‌ای در مدل‌سازی ریاضی پدیده‌های طبیعی در زمینه‌های مختلف علمی از جمله فیزیک، شیمی، مکانیک و غیره پیدا کرده است. علت این امر توصیف بهتر پدیده‌های طبیعی توسط این دسته از معادلات در مقایسه با معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی صحیح نظیر است. برای مطالعه‌ی بیشتر در این زمینه می‌توانید به [۳] رجوع کنید. بررسی وجود و یکتایی جواب برای معادلات دیفرانسیل تاخیری از مرتبه‌ی کسری مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است. آنها با بکارگیری روش‌هایی از جمله قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت باناخ، قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت لری-شودر و غیره نتایجی در این زمینه به دست آورده‌اند. اولین بار در [۴] تئوری اولیه اثبات وجود جواب دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل تاخیری کسری معرفی شده است. بعدا در [۲] این نتایج گسترش داده شده است و معادله‌ی دیفرانسیل شبه-خطی تاخیری با مرتبه‌ی کسری مطالعه شده است.

در این مقاله با کمک نتایج اخیر بدست آمده وجود و یکتایی جواب را برای معادله‌ی (۱.۱) مورد بررسی قرار خواهیم داد.

نکته ۱.۱. در این مقاله C_t فضای باناخ تمام توابع پیوسته از $[-\tau, t]$ به $\mathbb{R} \times C([-\tau, t]; \mathbb{R})$ با نرم

$$\|x\|_t = \sup_{\theta \in [-\tau, t]} |x(\theta)|$$

و همچنین $L^1(J; \mathbb{R})$ فضای تمام توابع انتگرال پذیر لبگ از J به $\mathbb{R}$ با نرم

$$\|x\|_{L^1} := \int_J |x(\theta)| d\theta$$

را نشان می‌دهد.

تعریف ۲.۱. انتگرال کسری از مرتبه‌ی $\alpha > 0$ روی تابع $x \in L^1(J, \mathbb{R})$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$I^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s)ds$$

که در آن $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما است.

تعریف ۳.۱. فرض کنید $n - 1 < \alpha \leq n$ ، مشتق کسری کاپوتو از مرتبه α برای تابع $x \in C([- \tau, T]; \mathbb{R})$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}^c D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{n - \alpha - 1} x^{(n)}(s) ds$$

لم ۴.۱. تابع $x \in C([- \tau, T]; \mathbb{R})$ جوابی از معادله (۱.۱) است هرگاه $\phi = x_0$ و در معادله انتگرال زیر صدق نماید

$$x(t) = \phi(\circ) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} f(s, x_s, Kx(s)) ds, \quad t \in J$$

برهان. با توسعه‌ی نتایج بدست آمده از لم (۳، ۱) در [۱] اثبات لم بالا به راحتی امکان پذیر می‌باشد. $\square$

۲. نتایج اصلی

در این بخش با اثبات قضیه‌ای، نتایج برای یکتایی جواب معادله (۱.۱) ارائه می‌نماییم. شرط زیر را روی تابع غیرخطی f در نظر می‌گیریم.

شرط: فرض کنید تابع f پیوسته باشد و برای هر

$$(t, x_t, Kx(t)), (t, y_t, Ky(t)) \in J \times C([- \tau, \circ]; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$$

ثابت‌های l_1, l_2, f_1 موجود باشد به طوری که

$$|f(t, x_t, Kx(t)) - f(t, y_t, Ky(t))| \leq l_1 \|x_t - y_t\|_\circ + l_2 |Kx(t) - Ky(t)|$$

$$f_1 = \sup_{t \in J} |f(t, \circ, \circ)|$$

قضیه ۱.۲. فرض کنید شرط بیان شده در بالا برقرار باشد، در این صورت اگر

$$l_1 + l_2 k_\circ < 1,$$

معادله (۱.۱) یک جواب یکتا دارد.

برهان. در ابتدا برای اثبات نیاز داریم، تا مساله (۱.۱) را به یک مساله نقطه‌ی ثابت تبدیل نماییم. با استفاده از لم (۴.۱) عملگر $\Lambda : C([- \tau, T]; \mathbb{R}) \rightarrow C([- \tau, T]; \mathbb{R})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Lambda x(t) = \begin{cases} \phi(\circ) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} f(s, x_s, Kx(s)) ds & t \in J \\ \phi(t) & t \in [- \tau, \circ] \end{cases}$$

تابع $\varphi(t) : [- \tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\varphi(t) = \begin{cases} \phi(\circ) & t \in [\circ, T] \\ \phi(t) & t \in [- \tau, \circ] \end{cases}$$

فرض می‌کنیم

$$0 < \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha)} [l_1 (R + \|\varphi\|_T) + l_2 (k_0 (R + \|\varphi\|_T)) + f_1] < R$$

و مجموعه $D_R = \{x \in C([- \tau, T]; \mathbb{R}) : \|x - \varphi\|_T \leq R\}$ را در نظر می‌گیریم. D_R مجموعه‌ی بسته، کراندار و محدب در فضای باناخ $C([- \tau, T]; \mathbb{R})$ است. هدفمان این است که نشان دهیم $\Lambda : D_R \rightarrow D_R$ می‌توان به آسانی طبق پیوستگی تابع f ، نشان داد که Λ پیوسته است. فرض کنید $x \in D_R$ و $t \in [- \tau, 0]$ در این صورت داریم

$$\Lambda x(t) - \varphi(t) = 0$$

همچنین فرض کنید $t \in [0, T]$ داریم

$$\begin{aligned} |\Lambda x(t) - \phi(0)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x_s, Kx(s))| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [l_1 \|x_s\|_0 + l_2 |Kx(s)| + f_1] ds \\ &\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha)} [l_1 (R + \|\varphi\|_T) + l_2 (k_0 (R + \|\varphi\|_T)) + f_1] < R \end{aligned}$$

بنابراین داریم $\|\Lambda x - \varphi\| < R$. در گام بعد نشان می‌دهیم که Λ نگاشت انقباضی روی D_R است. فرض کنید $x, y \in D_R$ آنگاه برای هر $t \in [- \tau, 0]$ بدست می‌آوریم،

$$\Lambda x(t) - \Lambda y(t) = 0$$

اگر $t \in [0, T]$ داریم

$$\begin{aligned} |\Lambda x(t) - \Lambda y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x_s, Kx(s)) - f(s, y_s, Ky(s))| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [l_1 \|x_s - y_s\|_0 + l_2 |Kx(s) - Ky(s)|] ds \\ &\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha)} [l_1 \|x - y\|_T + l_2 k_0 \|x - y\|_T] \\ &\leq [l_1 + l_2 k_0] \|x - y\|_T \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|\Lambda x(t) - \Lambda y(t)\|_T \leq [l_1 + l_2 k_0] \|x - y\|_T$$

که با توجه به فرض مساله نگاشت انقباضی می‌باشد. در نتیجه با بکارگیری قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت باناخ نگاشت Λ نقطه‌ی ثابت یکتا دارد. $\square$

مراجع

- [1] R. P. Agarwal, Y. Zhou and Y. He, *Existence of fractional neutral functional differential equations*, Comp. Math. Appl., 59 (2010), 1095–1100.
- [2] M. Belmekki, M. Benchohra, *Existence results for fractional order semilinear functional differential equations with nondense domain*, Nonlinear Anal., 72 (2010), 925–932.
- [3] K. Diethelm, *The analysis of fractional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 2010.
- [4] V. Lakshmikantham, *Theory of fractional functional differential equations*, Nonlinear Anal., 69 (2008), 3337–3343.

پوسٲرها



کلاسی از توابع به طور کامل یکنوا

محمدصادق قانعی بافقی و علی مرصعی

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان

sadeghghaneei@gmail.com

morassaei@znu.ac.ir

چکیده. در این نوشته ابتدا به معرفی توابع به طور کامل یکنوا می پردازیم و سپس در ادامه نشان می دهیم که تابع $P_n(x) = x^n + F_n(x) \left[e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]$ که در آن $F_n(x) = \sum_{v=0}^{n-1} c_v x^v$ چندجمله ای از درجه $n \geq 1$ با ضرایب حقیقی است به طور کامل یکنوا است به شرطی که $n = 1$ و $c_0 \geq 11/12$.

۱. پیش گفتار

تعریف ۱.۱. تابع $f(x)$ را روی بازه ی I تابع به طور کامل یکنوا نامیم هرگاه به ازای همه $x \in I$ و $n \geq 0$ داشته باشیم

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

این تعریف را هاسدورف در سال ۱۹۲۱ معرفی کرد.

توابع کاملاً یکنوا کاربردهای زیادی در زمینه های مختلف دارد. برای مثال در نظریه پتانسیل، نظریه احتمال، فیزیک، آنالیز عددی و مجانبی، ترکیبیات. یک سری از خواص بسیار مهم توابع کاملاً یکنوا را در [۳] می توان یافت. همچنین ریاضیدانان مختلفی نشان دادند که تابع های

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 47A55; Secondary: 39B52.

واژگان کلیدی. توابع به طور کامل یکنوا، تبدیل اشتلتیس.

زیادی از جمله تابع گاما، پلی گاما و دیگر توابع خاص به طور کامل یکنوا هستند. سندور^۱ و دبسن^۲ ثابت کردند که تابع $f(x) = (x+1)[e - (1 + \frac{1}{x})^x]$ روی $(0, \infty)$ نزولی و همگرا است. سوالی که مطرح شد این است که آیا f به طور کامل یکنواست؟ نشان داده می شود که پاسخ مثبت است. حتی می توان صورت کلی تر را بررسی کرد: چندجمله ای های $F_n(x) = P_n(x)[e - (1 + 1/x)^x]$ که در آن $P_n(x) = x^n + \sum_{v=0}^{n-1} c_v x^v$ ($n \in \mathbb{N}$) به طور کامل یکنوا است.

لم ۲.۱. اگر

$$f(x) = (x+1) \left[e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right] \quad (x > 0) \quad (1.1)$$

در این صورت

$$f(x) = \frac{e}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{s^s (1-s)^{1-s} \sin(\pi s)}{x+s} ds \quad (2.1)$$

لم ۳.۱. اگر

$$g(x) = \frac{1}{\pi} s^s (1-s)^{1-s} \sin(\pi s) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.1)$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\int_0^1 g(s) ds = \frac{e}{24}, \quad \int_0^1 s g(s) ds = \frac{e}{48}, \quad \int_0^1 \frac{1}{s} g(s) ds = \int_0^1 \frac{1}{1-s} g(s) ds = \frac{e}{2} - 1$$

لم ۴.۱. اگر

$$\Delta_1(x) = \frac{e - (1 + \frac{1}{x})^x}{(1 + \frac{1}{x})^x \left[\log(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{(x+1)} \right]} - x$$

در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Delta_1(x) = \frac{11}{12}$$

لم ۵.۱. جمع و حاصل ضرب توابع به طور کامل یکنوا، به طور کامل یکنوا است.

۲. نتایج اصلی

قضیه ۱.۲. اگر $p_n(x) = x^n + \sum_{v=0}^{n-1} c_v x^v$ چندجمله ای از درجه $n \geq 1$ با ضرایب حقیقی باشد، آنگاه تابع $x \rightarrow p_n(x) [e - (1 + 1/x)^x]$ روی $(0, \infty)$ به طور کامل یکنوا است اگر و تنها اگر $n = 1$ و $c_0 \geq 11/12$.

^۱J. Sandor

^۲L. Debnath

قضیه ۲.۲. اگر $p(x) = e - (1 + 1/x)^x$ ، در این صورت تبدیل اشتلتیس آن به صورت زیر است:

$$p(x) = \frac{1}{x+1} + \int_0^1 \frac{g(s)}{1-s} \frac{ds}{x+s}$$

به خصوص این تابع به طور کامل یکنوا است. در اینجا g تعریف شده در (۳.۱) است.

نتیجه ۳.۲. با استفاده از روابط قبل به سادگی می توان ثابت کرد که

$$p(x) = \frac{1}{x + \frac{11}{12}} f_{\frac{11}{12}}(x)$$

توجه ۴.۲. مسئله حل نشده آلزر^۳ این است که همه پارامترهای حقیقی $\alpha > 0$ و β را طوری تعیین کنید که

$$p_{\alpha,\beta}(x) = e^\alpha - \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{x+\beta}$$

به طور کامل یکنوا باشد.

مراجع

1. H. Alzer and C. Berg, *Some classes of completely monotonic function*, Fund. Math., 27 (2002), 445-460.
2. J. Sandor and L. Debnath, *On certain inequalities involving the constant e and their applications*, J. Math. Anal. Appl., 249 (2000), 569-582.
3. D. V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1941.

^۳H. Alzer



انحنای هولومورفیک با التصاق غیرمتریک روی منیفلدهای تقریباً تماسی لورنتزی

محمدباقر کاظمی و مریم رسولی

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان
mbkazemi@znu.ac.ir
rasuli@gmail.com

چکیده. در این مقاله یک التصاق ربع‌متقارن غیرمتریک روی منیفلدهای ساساکی لورنتزی معرفی می‌کنیم. سپس بعضی خواص تانسورهای هولومورفیک وابسته به آن التصاق را بررسی می‌کنیم.

۱. مقدمات

تعمیم‌های مختلف و جالبی از التصاق لوی‌چویتا در سال‌های اخیر ارائه شده است که با توجه به کاربرد آن‌ها در مقالات مختلف به آن‌ها پرداخته شده است [۴، ۵]. در این مقالات تقارن، تابدار بودن و متریک بودن این التصاق‌ها مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. از جمله در [۵] یک التصاق نیمه‌متقارن و غیرمتریک معرفی شده که به کمک ساختار ساساکی منیفلد تعریف شده است. در این مقاله ما التصاق ربع‌متقارن غیرمتریکی را بر روی ساختار تقریباً پاراساساکی لورنتزی معرفی می‌کنیم.

اهمیت معادلات گوس، کودازی و ریچی در آنالیز موضعی رویه‌ها در این است که اگر فضای محاط‌شده انحنای برشی ثابت داشته باشد، این معادلات نقش مشابه با معادله‌ی سازگاری در نظریه موضعی رویه‌ها ایفا می‌کند. برای زیرمنیفلد M از منیفلد ریمانی $\bar{M}$ اگر تانسور انحنای

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 53C05; Secondary: 52D09, 46B20.

واژگان کلیدی. منیفلد پاراساساکی لورنتزی، التصاق ربع‌متقارن غیرمتریک.

ریمانی را به ترتیب با R و $\bar{R}$ نمایش دهیم آن گاه معادلات ریچی، کودازی و گوس به صورت زیر داده می شوند:

$$g(\bar{R}(X, Y)Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) - g(h(X, Y)h(Y, Z)) \quad (۱.۱)$$

$$(\bar{R}(X, Y, Z))^{\perp} = (\nabla_X^h)(Y, Z) - (\nabla_Y^h)(X, Z) \quad (۲.۱)$$

$$g(\bar{R}(X, Y)U, V) = g(R^{\perp}(X, Y)U, V) + g([A_V, A_U]X, Y) \quad (۳.۱)$$

که در آن $X, Y, Z, W \in TM$ مماسی و $U, V \in TM$ عمود که h فرم بنیادین دوم A عملگر شکلی مربوط به فروبری و $R^{\perp}$ تانسور انحنای کلاف نرمال است. برای فروبری ایزومتريک $i: M \rightarrow M$ بین منیفلدهای ریمانی معادله گوس نشان می دهد که تانسور انحنای M وقتی که روی میدانهای برداری مماس به M در نظر گرفته می شود با تانسور انحنای M که یک تانسور شامل فقط فرم بنیادین دوم فروبری است متفاوت است. معادلات کودازی، گوس و ریچی ابزارهای بسیار مهمی برای توصیف زیرمنیفلد در فضای ریمانی است.

از طرف دیگر، مفهوم التصاق ربع متقارن روی منیفلد مشتق پذیر که در اینجا معرفی شده است به این صورت است که گوئیم التصاق خطی ∇ ربع متقارن است هرگاه تانسور تاب T که به صورت $T(X, Y) = \nabla_X^Y - \nabla_Y^X - [X, Y]$ است به فرم زیر قابل بیان باشد:

$$T(X, Y) = u(Y)\psi X - u(X)\psi Y. \quad (۴.۱)$$

منیفلد دیفرانسیل پذیر n -بعدی M ، منیفلد پارا ساساکی لورنتزی (LP -ساساکی) نامیده می شود هرگاه دارای یک میدان تانسوری ϕ از نوع $(1, 1)$ ، یک میدان برداری ξ ، یک -1 -فرمی η و متريک لورنتزی g باشد که در روابط زیر صدق کند [۱]:

$$\eta(\xi) = -1, \quad \phi^2(X) = X + \eta(X)\xi, \quad (۵.۱)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y), \quad (۶.۱)$$

$$(\nabla_X^{\phi})(Y) = g(X, Y)\xi + \eta(Y)X + 2\eta(X)\eta(Y), \quad (۷.۱)$$

که در اینجا ∇ یک التصاق لوی چویتا نسبت به متريک لورنتزی g است. به علاوه تساوی های زیر نیز در یک منیفلد LP -ساساکی برقرار است.

$$\phi\xi = 0, \quad \eta(\phi X) = 0, \quad \text{rank } \phi = n - 1.$$

اگر برای هر میدان برداری X و Y تعریف کنیم

$$\Phi(X, Y) = g(\phi X, Y),$$

آنگاه $\Phi(X, Y)$ یک میدان تانسوری متقارن $(2, 0)$ است. همچنین می توان نشان داد در منیفلد LP -ساساکی -1 فرمی η برای هر میدان برداری X, Y در فرمول زیر صدق می کند:

$$(\nabla_X^{\eta})Y = \Phi(X, Y). \quad (۸.۱)$$

قضیه ۱.۱ ([۳]). فرض کنید M یک منیفلد LP -سازگی n -بعدی باشد. آنگاه برای هر میدان برداری X, Y, Z روابط زیر برقرار است

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y \quad (۹.۱)$$

$$S(X, \xi) = (n - ۱)\eta(X) \quad (۱۰.۱)$$

$$S(\phi X, \phi Y) = S(X, Y) + (n - ۱)\eta(X)\eta(Y) \quad (۱۱.۱)$$

که R و S به ترتیب تانسور انحنا و ریچی M هستند.

فرض کنید M' زیرمنیفلدی از منیفلد ریمانی M باشد. در این صورت فرمول گوس و ونگارتن ارتباط بین التصاق‌های آن‌ها را به صورت زیر بیان می‌کند.

$$\nabla_X Y = \nabla'_X Y + h(X, Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM') \quad (۱۲.۱)$$

$$\nabla_X^N = -A_N X + \nabla_X^\perp N, \quad \forall N \in \Gamma(T^\perp M') \quad (۱۳.۱)$$

که $\nabla_X^Y, A_N X \in \Gamma(TM')$ و $\nabla_X^\perp N \in \Gamma(T^\perp M)$ ، $h(X, Y)$ است.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. فرض کنید M یک منیفلد LP -سازگی با التصاق لوی چوینای ∇ باشد. برای هر میدان برداری X و Y تعریف می‌کنیم

$$\bar{\nabla}_X^Y = \nabla_X^Y + \eta(Y)\phi X \quad (۱۰.۲)$$

$\bar{\nabla}$ را که یک التصاق خطی روی M است، التصاق ربع‌مقارن می‌نامیم.

لم ۲.۲. التصاق ربع‌مقارن غیرمتریک بوده و تانسور تاب آن غیر صفر است.

قضیه ۳.۲. فرض کنید M یک منیفلد LP -سازگی n -بعدی باشد. آنگاه تانسور ریچی $\bar{S}$ وابسته به التصاق ربع‌مقارن $\bar{\nabla}$ مقارن است.

برهان. از (۶.۱) و (۱۰.۲) با محاسبات مستقیم داریم

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + \phi(X, Z)\phi Y - \phi(Y, Z)\phi X \\ &\quad + \eta(Z)\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\} \end{aligned} \quad (۲.۲)$$

از (۷.۱) و (۲.۲) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \bar{K}(X, Y, Z, U) &= K(X, Y, Z, U) + \phi(X, Z)g(\phi Y, U) \\ &\quad - \phi(Y, Z)g(\phi X, U) + \eta(Z)K(X, Y, \xi, U). \end{aligned} \quad (۳.۲)$$

از طرفی تانسور ریچی $\bar{S}$ برابر است با

$$\bar{S}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(\bar{R}(e_i, X)Y, e_i)$$

که $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ یک پایه ارتونرمال است و $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ پس با اثرگیری از (۳.۲) داریم

$$\begin{aligned}\bar{S}(X, Y) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \{g(R(e_i, X)Y, e_i)\} - g(\phi X, \phi Y) \\ &\quad - \eta(Y)\eta(X) + n\eta(X)\eta(Y).\end{aligned}$$

از آنجایی که برای تانسور ریچی وابسته به التصاق لوی چویتا ∇ می توان نوشت

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(R(e_i, X)Y, e_i),$$

بنابراین

$$\bar{S}(X, Y) = S(X, Y) - g(X, Y) + n\eta(X)\eta(Y).$$

□

پس تانسور ریچی این التصاق متقارن است.

نتیجه ۴.۲. فرض کنید M یک منیفلد LP -ساکای است. آنگاه $\bar{r} = r$ که در آن r انحنا اسکالر التصاق لوی چویتا است.

مراجع

1. D. E. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Birkhäuser, Boston, 2010.
2. K. Matsumoto, *On Lorentzian paracontact manifolds*, Bull. Yamagata Univ. Natur. Sci., 13 (1989), 151-156.
3. R. Rosca, *On Lorentzian P-Sasakian manifolds*, World Scientific Publ., Singapore, 1992.
4. Y. Perktas, E. Kilic and M. Tripathi, *On a semi-symmetric connection in a Lorentzian para-Sasakian manifold*, Diff. Geom. Dynamical Sys., 12 (2010), 299-310.
5. S. Yuksel, E. Kilic and S. Keles, *On a semi-symmetric non-metric connection in an LP-Sasakian manifold*, Int. Electron. J. Geom., 3 (2010), 15-25.



ضرب تابیده در منیفلدهای تماسی متریک و منیفلدهای تقریباً مختلط

محمدباقر کاظمی و صغری طریقی

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان

mbkazemi@znu.ac.ir

STM2191@gmail.com

چکیده. در این مقاله وجود یک ساختار تقریباً تماسی متریک ساساکی بر روی حاصل ضرب تابیده یک منیفلد با ساختار تقریباً مختلط با فضای حقیقی را نشان می‌دهیم و خواص آن را بررسی می‌کنیم.

۱. پیش‌گفتار

پس از معرفی منیفلدهای شبه ریمانی توسط اونیل [۵]، این دسته از منیفلدها مورد توجه بسیاری از هندسه‌دانان و حتی فیزیکدانان قرار گرفت. ساختارهای مختلفی بر روی این منیفلدها بررسی شده و نتایج بسیار مهم و جالبی به دست آمده است. از جمله این ساختارها می‌توان به ساختار تقریباً تماسی متریک اشاره کرد [۲].

منیفلد M^{2n+1} دارای یک ساختار تقریباً تماسی متریک (φ, ξ, η, g) است اگر میدان تانسوری φ از نوع $(1, 1)$ ، میدان برداری ξ و 1 -فرمی η روی M^{2n+1} وجود داشته باشند به طوری که برای هر میدان برداری X و Y روی M^{2n+1} روابط زیر برقرار باشد:

$$g(X, \xi) = 1, \quad \varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi.$$

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 53C05; Secondary: 52D09, 46B20.

واژگان کلیدی. منیفلد تماسی متریک، ضرب تابیده، منیفلد مختلط.

تعریف ۱.۱ ([۳]). منیفلد تقریباً تماسی متریک M^{2n+1} با ساختار (η, ξ, φ, g) را منیفلد ساساکی گوئیم هرگاه

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \quad \forall X, Y \in TM.$$

در این منیفلدها تانسور انحنا در فضای فرم ساساکی به صورت زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = & \frac{c+3}{4}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ & + \frac{c-1}{4}\{g(X, \varphi Z)\varphi Y - g(Y, \varphi Z)\varphi X + 2g(X, \varphi Y)\varphi Z\} \\ & + \frac{c-1}{4}\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X - g(X, Z)\eta(Y)\xi \\ & - g(Y, Z)\eta(X)\xi\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

به منظور تعمیم این فضا، کاریازو و همکارانش در سال ۲۰۰۸ فضای فرم ساساکی تعمیم یافته را معرفی کردند. قبل از آنها بالزاک در سال ۱۹۸۹ فضای فرم مختلط را مطالعه و وجود آنها را ثابت کرده بود. یک فضای فرم ساساکی تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۲.۱ ([۱]). فرض کنید $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ یک منیفلد تقریباً تماسی متریک باشد. گوئیم M یک فضای فرم ساساکی تعمیم یافته است اگر توابع f_1, f_2, f_3 و f_3 روی M تعریف شده باشد به طوری که تانسور انحنا R برای X و Y و Z روی M به صورت زیر باشد

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = & f_1\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ & + f_2\{g(X, \varphi Z)\varphi Y - g(Y, \varphi Z)\varphi X \\ & + 2g(X, \varphi Y)\varphi Z\} + f_3\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X \\ & + g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

در این حالت این منیفلد را با نماد $M(f_1, f_2, f_3)$ نشان می دهند.

با استفاده از لم زیر نتایج اصلی را اثبات خواهیم کرد.

لم ۳.۱ ([۴]). فرض کنید $M = B \times_f F$ ، $\nabla, \nabla^B, \nabla^F$ و ∇^B التصاق های ریمانی به ترتیب روی M, B, F باشند. اگر X و Y دو میدان برداری روی B ، V و W دو میدان برداری روی F باشند داریم

$$(1) \quad \nabla_X Y \text{ ترفیعی از } \nabla_X^B Y \text{ است.}$$

$$(2) \quad \nabla_X V = \nabla_V X = \left(\frac{Xf}{f}\right)V$$

$$(3) \quad \text{مولفه های روی } \nabla_V W \text{ بر فضای پایه عمود هستند و}$$

$$\nabla_V W = -\frac{g_f(V, W)}{f} \text{grad } f$$

$$(4) \quad \text{مولفه های روی } \nabla_V W \text{ بر فضای پایه مماس اند و } \nabla_V W \text{ ترفیع از } \nabla_V^F W \text{ است.}$$

۲. نتایج اصلی

قضیه ۱.۲. فرض کنید $N_s^n(F_1, F_2)$ یک فضای فرم تعمیم یافته نامعین باشد. آنگاه منیفلد ضرب تابیده با ساختار تقریباً تماسی نامعین $M^{2n+1} = \mathbb{R} \times_f N$ یک فرم فضای ساساکی تعمیم یافته نامعین است و $M(f_1, f_2, f_3)$ با توابع

$$f_1 = \frac{(F_1 \circ \eta) - \varepsilon f'^2}{f^2}, \quad f_2 = \frac{(F_2 \circ \eta)}{f^2}, \quad f_3 = \varepsilon \frac{(F_1 \circ \eta) - \varepsilon f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f} \quad (۱.۲)$$

می باشد.

برهان. با توجه به اینکه منیفلد پایه یک فضای فرم تعمیم یافته نامعین است با فرض $X, Y, Z \in TM$ و با استفاده از لم فوق و محاسباتی مستقیم می توان نشان داد تانسور انحنای صورت زیر است:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \frac{F_1 \circ \pi - f'^2}{f^2} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ &+ \frac{F_2 \circ \pi}{f^2} \{g_f(X, \varphi Z)\varphi Y - g_f(Y, \varphi Z)\varphi X + 2g(X, \varphi Y)\varphi Z\} \\ &+ \left(\frac{F_1 \circ \pi - f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f}\right) \{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X \\ &+ g_f(X, Z)\eta(Y)\xi + g_f(Y, Z)\eta(X)\xi\}. \end{aligned}$$

□ که نشان می دهد فضای فرم تعمیم یافته است.

قضیه ۲.۲. فرض کنید N یک منیفلد تقریباً مختلط باشد. آنگاه $(\mathbb{R} \times_f N, \varphi, \xi, \eta, g_f)$ منیفلد ε -ترنس ساساکی با $\alpha = 0$ و $\beta = \frac{\varepsilon f'}{f}$ است اگر و تنها اگر N یک منیفلد مختلط کیلری باشد.

برهان. ایده کلی اثبات چنین است که با فرض $X = \eta(X)\xi + U$ و $Y = \eta(Y)\xi + V$ با توجه به لم (۳.۱) نشان دهیم

$$\begin{aligned} (\nabla_X \varphi)Y &= \nabla_X \varphi Y - \varphi \nabla_X Y \\ &= \nabla_{\eta(X)\xi} \varphi(V) + \nabla_U \varphi(V) - \varphi(\nabla_{\eta(X)\xi} \eta(Y)\xi + \nabla_U \eta(Y)\xi \\ &+ \nabla_{\eta(X)\xi} V + \nabla_U V) \end{aligned}$$

حال اگر فرض کنیم $\varphi(V) = JV$ از مجموع روابط فوق داریم

$$(\nabla_X \varphi)Y = \frac{f'}{f} \{g_f(\varphi(X), Y)\xi - \eta(Y)\varphi(X)\} + (\nabla_X^N J)V. \quad (۲.۲)$$

پس حکم برقرار است اگر و تنها اگر $(\nabla_U^N J)V = 0$ باشد و این هم معادل با این است که منیفلد N کیلری باشد. □

به کمک فرمول (۲.۲) و با فرض تقریباً حاصل ضربی بودن منیفلد پایه نتیجه زیر را بیان می‌کنیم.

نتیجه ۳.۲. فرض کنید N منیفلد تقریباً حاصل ضربی باشد آنگاه $(\mathbb{R} \times_f N, \varphi, \xi, \eta, g_f)$ رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$(\nabla_X \varphi)Y = \beta \{g_R(\varphi X, Y)\xi - \varepsilon \eta(Y)\varphi X\}, \quad \beta = -\varepsilon \frac{f'}{f}$$

اگر و تنها اگر $\nabla^N J = 0$.

مراجع

1. P. Alegre and A. Carriazo, *Structures on generalized Sasakian space forms*, Differ. Geom. Appl., 26 (2008), 656–666.
2. D. E. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Birkhäuser, Boston, 2010.
3. G. Calvaruso and D. Perrone, *Contact pseudo-metric manifolds*, Differ. Geom. Appl., 28 (2010), 615–634.
4. P. M. Gadea and A. Montesinos Amilibia, *Spaces of constant para-holomorphic sectional curvature*, Pacific J. Math., 136 (1989), 85–101.
5. B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Pure and Applied Mathematics, vol. 103, Academic Press, New York, 1983.

سخنرانی‌های عمومی



تاریخچه آنالیز تابعی در ایران

مهدی رجبعلی پور*

فرهنگستان علوم و مؤسسه آموزش عالی عرفان کرمان
radjabalipour@ias.ac.ir

چکیده. به دلائلی که در مقاله تفصیلی بر خواهیم شمرد، منظور ما از آنالیز تابعی کلیه شاخه‌های ریاضی است که با شماره‌های ۴۰ تا ۴۹ رده‌بندی انجمن ریاضی آمریکا مشخص شده‌اند و یا قسمت‌هایی از جبر خطی هستند که حالت خاصی از نظریه عملگرها به حساب می‌آیند. به طور کلی، در این مقاله شرح حال کسانی مطرح است که یکی از سه گزاره زیر در موردشان صادق باشد:

(۱) مدرک دکترائی در یکی از ده گرایش گفته‌شده در بالا داشته و در ایران استاد راهنمای دکتری یک نفر در هر شاخه دلخواه از معارف بشری (مانند ریاضی، فیزیک، متالورژی، حرکات موزون، آواز، روانشناسی و غیره) بوده باشد.
(۲) با هر مدرک دکترائی توانسته باشد یک نفر را در یکی از ده گرایش فوق فارغ‌التحصیل کند.

(۳) فارغ‌التحصیل دوره دکتری یکی از ده گرایش فوق از دانشگاه‌های ایران باشد.
پژوهش در آنالیز تابعی و به ویژه نظریه عملگرها از سال ۱۳۴۲ خورشیدی (۱۹۶۳ میلادی) با پیوستن دکتر حیدر رجوی به بخش ریاضی دانشگاه پهلوی (سابق) در شیراز رونق گرفت و از سال ۱۳۴۵ خورشیدی (۱۹۶۶ میلادی) با نوگشائی دوره فوق لیسانس ریاضی به همت دکتر منوچهر وصال (استاد آنالیز ریاضی دانشگاه تهران و معاون آموزشی وقت دانشگاه پهلوی)، آموزش آنالیز تابعی نیز شروع شد.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 46-03; Secondary: 01A65.

واژگان کلیدی. پایه‌گذاری آنالیز تابعی در ایران، پیشکسوتان آنالیز تابعی در ایران، دکتری ریاضی در ایران.
* سخنران مدعو



مقاله‌های عجیب و غریب

محمد صالح مصلحیان*

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد
moslehian@um.ac.ir

چکیده. یک مقاله یک بار نوشته می‌شود، ولی ممکن است بارها خوانده شود. پس باید در نگارش آن دقت و ظرافت به خرج داد. در این سخنرانی ابتدا به ضرورت‌های لازم برای پژوهش خوب و نگارش مقاله آبرومند اشاراتی می‌شود، سپس به بعضی ملاحظات ارسال مقاله به مجلات معتبر می‌پردازیم و در انتها با ذکر مثالهایی به بعضی جوانب غفلت علمی (موسوم به سرقت علمی) توجه می‌کنیم.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 00-01.

واژگان کلیدی. پژوهش در ریاضی، نگارش مقاله ریاضی، سرقت علمی.
* سخنران مدعو